高1・高2 ハイレベル数学B+C(ベクトル)を受講する皆さんへ

ようこそ，スタディサプリ 高１・高２ハイレベル数学Ｂ+Ｃ(ベクトル)の講座へ。この講座は

「基本問題だけではなく，応用問題を自力で解けるようになりたい」

という人に適した講座となっています。

数学Ｂ+Ｃ(ベクトル)では，高校数学の根幹とも言える内容を学習します。この講座では，それまでに学び，また標準的な問題を解くことで自分のものになったはずの知識・技能を振り返りながら，その活用の仕方を，問題を通じてじっくり深く学んでいきます。

この講座を受講いただくことで，知識・技能のもつ意味や，その使い方，使う場面を体験することができます。また，なぜそういった手法を取るのか，それによって何が解決できるのか，を学ぶことで，解法に対する納得感が高まります。そのため，解法を丸暗記する必要がなく，さらに，今後の学習で出会う様々な問題の中で広く使える数学的な見方・考え方が身についていきます。この講座を通じて数学Ｂ+Ｃ(ベクトル)と新たな気持ちで向き合うことで

「なるほど，そういうことか！」を積み重ね，自分の成長を実感する

ことができると確信しています。

「人から人へ」。それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません。スタディサプリの講師は，いつでも「あなた」が真剣に学びに向かう姿を思い浮かべながら授業をしています。あなたが本気で講師から学び，学んだことが何だったのかを考え，問題を通じてそれを確認し，自分のものにする，そういった一連の体験をこの講座を通じて提供いたします。そして，あなたがそうして得たことを，様々なアウトプットを通じて，今度はあなたが誰かに伝えていただきたいと思います。

講義を１回受けてわからなければ，何度でも，自分のペースで講義を見返すことが可能です。ただし，最初から完璧な理解を目指す必要はまったくありません。まずは「たぶんこういうことなんだろうな」といったように，全体像をざっくり捉えることから始めましょう。その状態で先に進み，前に学んだ知識・技能や解法の一部または全部を使うことで，その真意がわかる，というのも数学ならではですし，気になった時点で前に戻り，改めて理解を深める，ということも可能です。その学び方やペースは，他の人と比較する必要はありません。

学びにおいて，主役は「あなた」です。

あなたの，あなたならではの学びを，この講座が力強くサポートします。ようこそ『スタディサプリ』の世界へ！

山内　恵介

目次

第１章　数列

第１講　等差数列，等比数列
PART1　等差数列とその和
PART2　等比数列とその和
PART3　等差数列と等比数列

第２講　和の記号 Σ，階差数列
PART1　和の記号 Σ とその性質
PART2　階差数列と一般項，和と一般項
PART3　さまざまな数列の和

第３講　群数列，漸化式
PART1　群数列として考える
PART2　漸化式
PART3　連立漸化式

第４講　数学的帰納法
PART1　数学的帰納法による証明
PART2　数学的帰納法による不等式の証明
PART3　漸化式と数学的帰納法

第２章　統計的な推測

第５講　確率分布
PART1　二項分布の期待値と分散
PART2　連続型確率変数の期待値と標準偏差
PART3　二項分布の正規分布による近似

第６講　統計的な推測
PART1　母平均の推定
PART2　母比率の推定
PART3　仮説検定

第３章　平面ベクトル

第７講　平面上のベクトル，ベクトルの成分表示
PART1　ベクトルの分解
PART2　ベクトルの成分と平行，座標と成分表示
PART3　ベクトルの成分と大きさ，分解

第８講　ベクトルの内積
PART1　ベクトルの内積
PART2　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角
PART3　ベクトルの大きさと内積

第９講　位置ベクトル
PART1　位置ベクトル
PART2　分点を表す位置ベクトル
PART3　共線条件

第10講　ベクトルと平面図形
PART1　交点の位置ベクトル
PART2　正多角形
PART3　三角形の面積

第11講　ベクトル方程式
PART1　直線のベクトル方程式
PART2　円のベクトル方程式
PART3　ベクトルの終点の存在範囲

第４章　空間ベクトル

第12講　空間のベクトル
PART1　空間の座標
PART2　空間ベクトルの内積
PART3　三角形の面積，２つのベクトルに垂直な単位ベクトル

第13講　空間図形とベクトル
PART1　位置ベクトル
PART2　共線条件
PART3　共面条件

第14講　空間ベクトルの様々な問題，空間座標における図形
PART1　直線と平面の交点
PART2　直線と平面の垂直
PART3　ベクトル方程式

講座の受講の仕方

ここでは，効果的な講座の受講の仕方についてお伝えします。講座は大きく「テキスト」「講義動画」「解答」に分かれています。この３つを効果的に使い，実力をつけていきましょう。

①　テキストについて

この講座のテキストは，講ごとに３つのPART（セクション）に分かれています。

各PARTは，次のような項目で構成されています。

「講義問題」（1，2など）

⇒　そのPARTで学ぶべき内容を含んだ問題。

PARTによっては，1[1]，1[2]のように分かれている場合もあります。

「Point Pickup」

⇒　「講義問題」を解くために必要な知識・技能や考え方，方針を整理

「確認問題」

⇒　「講義問題」で学んだことを確認するための問題

「講義問題」「Point Pickup」については，「動画」で解説を行います。「講義問題」の予習は必要ありませんが，あらかじめ自分で解けるところまで解いてから，「動画」を見ても構いません。

②　講義動画について

受講の準備ができましたら，テキストと筆記用具を手元におき，動画を再生してください。そして，真剣に受講して，先生がこの動画を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください。

各講に含まれるPART内の動画は，１つまたは複数のチャプターに分かれています。

（例）　第３講　群数列，漸化式

PART1　群数列として考える　…　【講義問題1】

PART2　漸化式　…　【講義問題2[1]】・【講義問題2[2]】

それぞれのPARTにおける主な受講の流れを説明します。

(1)　【講義問題】のチャプターで，講義問題を解く上で必要な知識，用語，公式等を「Point Pickup」を交えながら説明します。その後，講義問題を解説していきます。それぞれの問題が，どのようにして解答に至るかを，そのプロセスも含めて動画でじっくり学んでください。途中で動画を一時停止しながら，途中計算等をテキストやノートに書

いていただいて構いませんが，大切なのは集中して授業を受講することです。「別冊解答」には，講義問題の解答解説が掲載されておりますので，動画の途中計算をすべて書き写す必要はありません。書くことに集中するのではなく，講師の言葉一つひとつにしっかりと耳を傾けてください。

⑵　解説された講義問題を，何も見ずに自分で解いてみましょう。途中で手が止まってしまった場合は，自分で書いた途中計算や別冊解答を参照し，また必要に応じて講義問題の動画を見直し，どこに手が止まった原因があったのかを振り返り，その続きからまた解き進めてみましょう。最後まで解ききったら，自分で書いた解答を最初から最後まで読み，その流れを把握することをオススメいたします。

各 PART の学習の流れを，今一度確認してみましょう。

「講義問題＆ Point Pickup を通じて学ぶ」→「自分で問題を解く」

1 つの PART でおよそ 15 分～ 30 分程度の受講時間となります。

各講に含まれる 3 つの PART の受講が終了すると，その講が終了します。時間がない時は，PART 単位の受講でも構いません。また，週末にまとめて 1 講分受講してもよいでしょう。

大切なのは

- **「新しい知識や考え方，その使い方や場面を知って，思考の幅を広げる」**
- **「講師が伝えたこと」を「自分で他の人に伝えられるようにする」**
- **「問題が解けるようになることがゴールではなく，なぜそう解くのかを学ぶ」**

という気持ちで受講することです。

動画で学ぶことに慣れていない人や，応用問題から学んだ経験が少ない人は，最初は「授業が速い！」と感じるかもしれません。ですが，安心してください。この講座は，好きなところで動画を停止できます。「ん？」と思ったら止めて，いま伝えられたことがどういう意味をもつのかを考えること，必要なら戻って何度も再生すること。焦る必要はありません。そして，講座の受講を進めていくうちに，感じ取り，表現できるスキルが向上することで，一度で聞き取れる，感じ取れる内容が増えていくでしょう。

もう 1 つ大切なこと，それは

- **「やっぱり自分はできない」は厳禁！**

だと言うことです。あきらめず，何度でもチャレンジすること。あなたには，あなたがまだ気づいていないかもしれない，「理解する力」が必ずあります。

③　復習について

その日の動画の受講が完了したら

・この講(PART)から何を知ったか，何を学んだか

を思い浮かべてみましょう。必要に応じてテキストをもう一度見直してみましょう。

また，後日，講義問題をもう一度解くことで，

・この PART を受講して何ができるようになったか

を確かめてみましょう。もし解法が全然思いつかない，すっかり忘れてしまった，という場合は，まずはノートや別冊解答を，それでも思い出せない場合は動画を見直してみましょう。学んだ記憶がよみがえるはずです。

・「復習することで，学びを実感し，学びを自分のものにする」

という気持ちを忘れないようにしましょう。

④　確認問題について

①～③が終わると，自分がその PART の内容を本当に理解しているのかを，別の問題で確かめたくなるはずです。各 PART の終わりに「**確認問題**」を用意してあります。講義問題と同様，その PART で学んだことを思い出しながら，自力で解いてみましょう。

・「問題を解くことで，知識を引き出し，それを活用する練習をする」

単なる反復練習ではなく，学んだことを思い出しながら，自覚しながら解く，それを忘れないでください。

以上を繰り返すことにより，飛躍的に理解が深まります。これは今後，数学 B+C(ベクトル)を活用するための貴重な経験としてあなたに刻まれていきます。

受講を続ける上で大切なのは

・ペースを作り，守る

ことです。各 PART，およそ 15 分～ 30 分。それを，どの曜日のどの時間帯に何 PART (何講)受講するのかを決めるとよいでしょう。そして，決めた曜日の決めた時間に，確実に受講する習慣を身につけましょう。あなたが学校で時間割に沿って授業を受けるのと同じように，まずはあなたのスケジュールに『スタディサプリ』を受講する時間，数学 B+C(ベ

クトル)と本気で向き合う時間，これを組みこんでください。学校の宿題等，何があっても，決めたペースを守ることを心がけ，できない理由を作らないこと。それを愚直なまでに繰り返すことで，確実な「理解力向上」「実力向上」，そしてそれを実現している自分の姿があることに気づき，それが「自信」につながります。

この「高１・高２ハイレベル数学B+C(ベクトル)」は，これまでの学習や問題演習で培った知識・技能を活用する方法や場面を経験するための講座ですが，ご紹介できているのはその方法や場面のほんの一部となります。受講後は，**「高１・高２ トップレベル数学ⅠAⅡB+C(ベクトル)」**に進んでみてください。自分のもっている知識に，さらにこんな使い方があるのか，という気づきが得られ，その気づきにより，もっとできることを増やしたい，活用の幅を広げたい，そう思うはずです。それこそが，無限に拡がる数学B+C(ベクトル)の世界への第一歩を踏み出した瞬間です。

【MEMO】

[MEMO]

第 1 講　等差数列，等比数列

PART1　等差数列とその和

1　第 10 項が 230，第 25 項が -220 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　一般項 a_n，和 S_n を求めよ。

(2)　S_n の最大値を求めよ。

(3)　$|S_n|$ の最小値を求めよ。

Point Pickup

初項 a，公差 d の等差数列の一般項は $a_n=a+(n-1)d$

初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和は $S_n=\dfrac{1}{2}n(a+l)=\dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

初項 a が正，公差 d が負である等差数列の和の最大値は，正の項の総和である。

第１講　PART1　確認問題

1　第５項が31，第20項が -29 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　一般項 a_n，和 S_n を求めよ。

$a_n=$ [アイ] $n+$ [ウエ]

$S_n=$ [オ]

[[オ] の選択肢]

①　$\frac{n}{2}(49-2n)$　　②　$n(49-2n)$

③　$\frac{n}{2}(61-4n)$　　④　$n(61-4n)$

⑤　$\frac{n}{2}(98-n)$　　⑥　$n(98-n)$

(2)　S_n の最大値を求めよ。

[カキク]

(3)　$|S_n|$ の最小値を求めよ。

[ケコ]

PART2　等比数列とその和

2　等比数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ。

Point Pickup

初項 a，公比 r の等比数列の一般項は $a_n=ar^{n-1}$

初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和は

$r\neq1$ のとき　$S_n=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}=\dfrac{a(r^n-1)}{r-1}$

$r=1$ のとき　$S_n=na$

第 1 講　PART2　確認問題

1　等比数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{16}=\sqrt{3}$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{16}}=\frac{3}{2}$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{16}$ の値を求めよ。

$$\frac{\boxed{\text{アイウ}}}{\boxed{\text{エオ}}}$$

PART3　等差数列と等比数列

3　実数係数の３次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が３つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする。α，β，γ はある順で等差数列となり，また，ある順で等比数列となる。このとき，a，b，α，β，γ の値を求めよ。

Point Pickup

数列 a，b，c が等差数列　$\Longleftrightarrow$　$2b=a+c$

数列 a，b，c が等比数列　$\Longleftrightarrow$　$b^2=ac$

第 1 講　PART3　確認問題

1　実数係数の３次方程式 $2x^3+ax^2+bx+2=0$ が３つの実数解 α，β，$\gamma(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする。α，β，γ はある順で等差数列となり，また，ある順で等比数列となる。このとき，a，b，α，β，γ の値を求めよ。

$a=$ アイ，$b=$ ウエ，

$\alpha=$ オカ，$\beta=\dfrac{\text{キ}}{\text{ク}}$，$\gamma=$ ケ

第 2 講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σとその性質

1 ［1］ 恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ。

［2］ 次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1) 1，$1+2$，$1+2+3$，……

(2) 1，$1+2$，$1+2+2^2$，……

(3) $1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……

Point Pickup

［1］ 恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において，$k=1$，$k=2$，……，$k=n$ として辺々加える。

［2］ 数列 $\{a_n\}$ の第 k 項 a_k を k の式で表し，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を計算する。

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ の計算においては，a_k に含まれる k 以外の文字は定数とみなす。

第 2 講　PART1　確認問題

1 恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

が成り立つことを示せ。

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

$\vdots$

$k=n$ のとき　$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

これらの式を辺々加えると

$$\boxed{\text{ア}}=\boxed{\text{イ}}\sum_{k=1}^{n}k^3+\boxed{\text{ウ}}\sum_{k=1}^{n}k^2+\boxed{\text{エ}}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\boxed{\text{オ}}$$

$$=\boxed{\text{イ}}\sum_{k=1}^{n}k^3+\boxed{\text{ウ}}\cdot\boxed{\text{カ}}+\boxed{\text{エ}}\cdot\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}$$

したがって

$$\boxed{\text{イ}}\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\boxed{\text{ケ}}\right)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$

$$=\boxed{\text{コ}}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n} k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

[ア の選択肢]

① n^4　　② n^4-1

③ $(n+1)^4$　　④ $(n+1)^4-1$

⑤ $\sum_{k=1}^{n} k^4-1$　　⑥ $\sum_{k=1}^{n} (k+1)^4-1$

[オ ～ コ の選択肢]

① 1　　② n　　③ $n+1$

④ $n-1$　　⑤ n^2　　⑥ n^2+1

⑦ $(n+1)^2$　　⑧ $n^2(n+1)^2$　　⑨ $\frac{1}{2}n(n+1)$

⑩ $\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

2 2，2+4，2+4+6，……

$$\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}n\left(n+\boxed{ス}\right)\left(n+\boxed{セ}\right)$$

（ただし， ス ＜ セ とする）

3 2，2+4，2+4+8，……

$$\boxed{ソ}^{n+\boxed{タ}}-\boxed{チ}n-\boxed{ツ}$$

4 2・n，4・$(n-1)$，6・$(n-2)$，……

$$\frac{\boxed{テ}}{\boxed{ト}}n\left(n+\boxed{ナ}\right)\left(n+\boxed{ニ}\right)$$

（ただし， ナ ＜ ニ とする）

[MEMO]

PART2　階差数列と一般項，和と一般項

2　［1］　次の数列の一般項を求めよ。

$1,\ 2,\ 4,\ 10,\ 23,\ 46,\ 82,\ 134,\ \cdots\cdots$

［2］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

Point Pickup

［1］　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を調べても規則性がつかめないときは，数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を調べてみるとよい。

［2］　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=S_n-S_{n-1}$　　$n=1$ のとき　$a_1=S_1$

数列 $a_1,\ a_3,\ a_5,\ \cdots\cdots$ の第 k 項は a_{2k-1} であり，数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n において n に $2k-1$ を代入して求めることができる。

第 2 講　PART2　確認問題

1　次の数列の一般項を求めよ。

2, 3, 3, 3, 4, 7, 13, 23, ……

$$\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\left(n^3-\boxed{ウ}n^2+\boxed{エオ}n-\boxed{カ}\right)$$

2　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=2n^2+7n$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_n=\boxed{キ}n+\boxed{ク}$$

(2)　和 $a_2+a_4+a_6+\cdots\cdots+a_{2n}$ を求めよ。

$$\boxed{ケ}n^2+\boxed{コ}n$$

PART3　さまざまな数列の和

3　［1］　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ の和を求めよ。

［2］　次の数列の和を求めよ。

$$1+\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}$$

Point Pickup

［1］　部分分数分解

$$\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\qquad\frac{1}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+2)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(k+2)-k}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

［2］　一般項が（等差数列）×（等比数列）の形をした数列の和 S は，等比数列の公比 r を用いて $S-rS$ を計算することで求めることができる。

第 2 講　PART3　確認問題

1　次の和を求めよ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{n\left(n+\boxed{\text{ア}}\right)}{\boxed{\text{イウ}}\left(\boxed{\text{エ}}n+\boxed{\text{オ}}\right)\left(\boxed{\text{カ}}n+\boxed{\text{キ}}\right)}$$

（ただし，$\boxed{\text{オ}}<\boxed{\text{キ}}$ とする）

2　次の数列の和を求めよ。

$$3\cdot1+5\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^{n-1}$$

$$=\left(\boxed{\text{ク}}n-\boxed{\text{ケ}}\right)\cdot2^{\boxed{\text{コ}}}+\boxed{\text{サ}}$$

[$\boxed{\text{コ}}$ の選択肢]

①　n　　②　$n+1$　　③　$n+2$　　④　$2n$

第 3 講　群数列，漸化式

PART1　群数列として考える

1　数列 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{1}{6}, \cdots\cdots$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{7}{18}$ は第何項か。

(2)　第 200 項を求めよ。

(3)　初項から第 200 項までの和を求めよ。

Point Pickup

数列を，ある規則によっていくつかの群に分けて考える(群数列として考える)とき，

- もとの数列の一般項や規則性
- 第 n 群の項数，初項，末項

に着目するとよい。

第 3 講　PART1　確認問題

1 数列 $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, ……

について，次の問いに答えよ。

(1) $\frac{11}{8}$ は第何項か。

第 アイ 項

(2) 第 800 項を求めよ。

$\frac{\text{ウエ}}{\text{オカ}}$

(3) 初項から第 800 項までの和を求めよ。

キクケ

PART2　漸化式

2　[1]　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=2$，$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+4^n+2n-3$　　(4)　$a_1=-2$，$4a_{n+1}=5a_n+4$

[2]　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1$，$na_{n+1}=2(n+1)a_n$

Point Pickup

[1]　$a_{n+1}=a_n+d$　…… 公差 d の等差数列

$a_{n+1}=ra_n$ …… 公比 r の等比数列

$a_{n+1}=a_n+f(n)$ …… $f(n)$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項

$a_{n+1}=pa_n+q$ …… $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形すると，数列 $\{a_n-\alpha\}$ は等比数列

[2]　(1)　両辺の逆数をとる。

(2)　$f(n+1)a_{n+1}=pf(n)a_n$ の形に変形する。

第 3 講　PART2　確認問題

次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

1 $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n-2$

$a_n=$ [アイ] $n+$ [ウ]

2 $a_1=\frac{1}{4},\ 2a_{n+1}+a_n=0$

$a_n=\left(\frac{\text{[エオ]}}{\text{[カ]}}\right)^{\text{[キ]}}$

[[キ] の選択肢]

① $n-1$　　② n　　③ $n+1$　　④ $n+2$

3 $a_1=2,\ a_{n+1}=a_n+2^{n+1}+4n+4$

$a_n=2^{\text{[ク]}}+$ [ケ] n^2+ [コ] $n-$ [サ]

[[ク] の選択肢]

① $n-1$　　② n　　③ $n+1$　　④ $n+2$

4 $a_1=4,\ 3a_{n+1}-4a_n=1$

$a_n=$ [シ] $\cdot\left(\frac{\text{[ス]}}{\text{[セ]}}\right)^{n-1}-$ [ソ]

5　$a_1=\dfrac{1}{7}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{8a_n-3}$

$$a_n=\frac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}\cdot\left(\boxed{ツテ}\right)^{n-1}+\boxed{ト}}$$

6　$a_1=3$，$3na_{n+1}=(n+1)a_n$

$$a_n=n\cdot\left(\frac{\boxed{ナ}}{\boxed{ニ}}\right)^{\boxed{ヌ}}$$

[$\boxed{ヌ}$ の選択肢]

①　$n-2$　　②　$n-1$　　③　n　　④　$n+1$

[MEMO]

PART3　連立漸化式

3　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1=2$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α, β の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

Point Pickup

数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の連立漸化式から数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求める方法として

$$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$$

を満たす α, β の組を求め，数列 $\{a_n-\alpha b_n\}$ の一般項を n の式で表す方法がある。

第 3 講　PART3　確認問題

1　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_1=1,\ b_1=1,$$

$$a_{n+1}=6a_n+6b_n,\ b_{n+1}=-a_n+b_n$$

で定める。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α，β の値を求めよ。

$$(\alpha,\ \beta)=(\boxed{\text{アイ}},\ \boxed{\text{ウ}}),\ (\boxed{\text{エオ}},\ \boxed{\text{カ}})$$

（ただし，$\boxed{\text{アイ}}<\boxed{\text{エオ}}$ とする）

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

$$a_n=-\boxed{\text{キ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{n-1}+\boxed{\text{ク}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{n-1}$$

$$b_n=\boxed{\text{ケ}}\cdot\boxed{\text{ウ}}^{n-1}-\boxed{\text{コ}}\cdot\boxed{\text{カ}}^{n-1}$$

第 4 講　数学的帰納法

PART1　数学的帰納法による証明

1 (1)　すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

(2)　n が自然数のとき, 5^n-2^n が 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

Point Pickup

自然数 n に関する命題 P がすべての自然数 n で成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り

［1］　$n=1$ のとき命題 P が成り立つことを示す。

［2］　$n=k$ のとき命題 P が成り立つことを仮定し, $n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

第4講　PART1　確認問題

1 すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

選択肢は最も適切なものを選べ。

(証明)

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

……(＊)

とする。

[1]　$n=$ ア のとき

((＊)の左辺) ＝ イ

((＊)の右辺) ＝ ウ

よって，(＊)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

このとき

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\boxed{エ}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\frac{k+\boxed{オ}}{\boxed{カ}(k+\boxed{キ})}=\frac{(k+1)+\boxed{ク}}{\boxed{カ}\{(k+1)+\boxed{ケ}\}}$$

よって，$n=$ コ のときにも(＊)は成り立つ。

[1], [2]より, すべての自然数 n について, (＊)は成り立つ。

[イ , ウ の選択肢]

① 1　② $\frac{1}{2}$　③ $\frac{3}{4}$　④ $\frac{8}{9}$

[エ の選択肢]

① $\frac{k+2}{2(k+1)}$　② $\frac{k+3}{2(k+2)}$

③ $\frac{n+2}{2(n+1)}$　④ $\frac{n+3}{2(n+2)}$

⑤ $\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$　⑥ $\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$

[コ の選択肢]

① $n-1$　② $n+1$

③ $k-1$　④ k　⑤ $k+1$

2 n が自然数のとき，$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数であることを数学的帰納法で証明せよ。

（証明）

「$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数である」を（＊）とする。

[1]　$n=1$ のとき

$$2^{6\cdot 1-5}+3^{2\cdot 1}=\boxed{\text{サシ}}$$

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$2^{6k-5}+3^{2k}$ は 11 の倍数

すなわち　$2^{6k-5}+3^{2k}=\boxed{\text{スセ}}\,m$（$m$ は整数）

このとき

$$\begin{aligned}&2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}\\&=\boxed{\text{ソタ}}\cdot 2^{6k-5}+\boxed{\text{チ}}\cdot 3^{2k}\\&=\boxed{\text{ソタ}}\left(\boxed{\text{スセ}}\,m-3^{2k}\right)+\boxed{\text{チ}}\cdot 3^{2k}\\&=11\left(\boxed{\text{ツテ}}\,m-\boxed{\text{ト}}\cdot 3^{2k}\right)\end{aligned}$$

$\boxed{\text{ツテ}}\,m-\boxed{\text{ト}}\cdot 3^{2k}$ は整数であるから，

$2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}$ は 11 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

PART2　数学的帰納法による不等式の証明

2　［1］　n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < 2 - \frac{1}{n}$$

［2］　n が自然数のとき，不等式 $n! \geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

Point Pickup

$n \geqq$ ● であるすべての自然数 n について不等式 $A > B$ ……… ① が成り立つことを数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り

［1］　$n =$ ● のとき①が成り立つことを示す。

［2］　$n = k$ ($k \geqq$ ●) のとき①が成り立つことを仮定し，$n = k+1$ のときにも①が成り立つことを示す。

第 4 講　PART2　確認問題

1　n が自然数のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$$

選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$　すなわち

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \geqq \frac{2n}{n+1} \quad \cdots\cdots(*)$$

について

［1］　$n=$ ア のとき

（$(*)$の左辺）$=$ イ

（$(*)$の右辺）$=$ ウ

よって，$(*)$は成り立つ。

［2］　$n=k$ のとき，$(*)$が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k} \geqq \frac{2k}{k+1}$$

このとき

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$\geqq\left(\boxed{\text{エ}}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{k}{(k+\boxed{\text{オ}})(k+\boxed{\text{カ}})}>\boxed{\text{キ}}$$

（ただし，オ $<$ カ とする）

ゆえに

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

よって，$n=$ ［ク］ のときにも（＊）は成り立つ。

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，（＊）すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\geqq\frac{2n}{n+1}$$

は成り立つ。

［［エ］の選択肢］

① $\dfrac{2k}{k+1}$　② $\dfrac{2k+2}{k+2}$

③ $\dfrac{2n}{n+1}$　④ $\dfrac{2n+2}{n+2}$

［［ク］の選択肢］

① $n-1$　② $n+1$

③ $k-1$　④ k　⑤ $k+1$

2 n を4以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$4^{n-2} \geqq n^2$$

選択肢は最も適切なものを選べ。

(証明)

$$4^{n-2} \geqq n^2 \cdots\cdots(*)$$

とする。

[1]　$n=$ ケ のとき

((＊)の左辺)＝ コサ

((＊)の右辺)＝ シス

よって，(＊)は成り立つ。

[2]　$n=k\,(k \geqq$ ケ $)$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$4^{k-2} \geqq k^2$$

このとき

$$4^{(k+1)-2}-(k+1)^2$$

$$= \boxed{セ} \cdot 4^{k-2}-(k+1)^2$$

$$\geqq \boxed{セ} \cdot \boxed{ソ} -(k+1)^2$$

$$= \left(\boxed{タ}k+1\right)\left(k-\boxed{チ}\right)>0$$

ゆえに　$4^{(k+1)-2} \geqq (k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときにも(＊)は成り立つ。

[1]，[2]より，4以上のすべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[ソ の選択肢]

① $(k-1)^2$　　② k^2

③ $(n-1)^2$　　④ n^2

PART3　漸化式と数学的帰納法

3　[1]　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

[2]　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。すべての自然数 n について $a_n>a_{n+1}>1$ が成り立つことを示せ。

Point Pickup

[1]　a_1，a_2，a_3，a_4，a_5 から一般項を推測し，それが正しいことを，与えられた漸化式を用いて数学的帰納法にて証明する。

[2]　まず，$a_n>1$ であることを数学的帰納法で証明し，$a_n>1$ を用いて $a_n>a_{n+1}$ を示す。

第４講　PART3　確認問題

1　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{4-a_n}{3-a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，

次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

$$a_2=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}},\quad a_3=\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}},\quad a_4=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}$$

(2)　一般項 a_n を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

（証明）

(1)より，$a_n=\boxed{キ}$ ……(＊)と推測される。

[1]　$n=1$ のとき　$a_1=1$ より，(＊)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\boxed{ク}}{3-\boxed{ク}}=\boxed{ケ}$$

よって，$n=\boxed{コ}$ のときにも(＊)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[$\boxed{キ}$ の選択肢]

①　$\dfrac{n+1}{2}$　②　$\dfrac{2n-1}{n}$　③　$\dfrac{2n-1}{2^{n-1}}$　④　$\dfrac{3^{n-1}}{2^{n-1}}$

[$\boxed{ク}$ の選択肢]

①　$k+1$　②　$\dfrac{k+1}{2}$　③　$\dfrac{k+2}{2}$

④　$\dfrac{2k-1}{k}$　⑤　$\dfrac{2k+1}{k+1}$　⑥　$\dfrac{2k-1}{2^{k-1}}$

⑦　$\dfrac{2k+1}{2^k}$　⑧　$\dfrac{3^{k-1}}{2^{k-1}}$　⑨　$\dfrac{3^k}{2^k}$

［ケ の選択肢］

① $k+1$　② $\dfrac{k+1}{2}$　③ $\dfrac{(k+1)+1}{2}$

④ $\dfrac{2(k+1)-3}{(k+1)-1}$　⑤ $\dfrac{2(k+1)-1}{k+1}$

⑥ $\dfrac{2(k+1)-3}{2^{(k+1)-2}}$　⑦ $\dfrac{2(k+1)-1}{2^{(k+1)-1}}$

⑧ $\dfrac{3^{(k+1)-2}}{2^{(k+1)-2}}$　⑨ $\dfrac{3^{(k+1)-1}}{2^{(k+1)-1}}$

［コ の選択肢］

① $n-1$　② $n+1$

③ $k-1$　④ k　⑤ $k+1$

2

$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}+\dfrac{8}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

すべての自然数 n について，次の不等式が成り立つことを証明せよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$a_n>4$

(2)　$a_n>a_{n+1}$

（証明）

(1)　$a_n>4$ ……(＊)とする。

［1］　$n=1$ のとき　$a_1=5>4$ より(＊)は成り立つ。

［2］　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_k>4$$

この仮定のもとで，$a_{k+1}>$ サ すなわち

$a_{k+1}-$ サ >0 を示せばよい。

このとき

$$a_{k+1}-\boxed{サ}=\frac{a_k}{2}+\frac{8}{a_k}-\boxed{サ}$$

$$=\frac{\left(a_k-\boxed{シ}\right)^2}{\boxed{ス}\,a_k}$$

仮定より，$a_k>4$ であるから

$$\left(a_k-\boxed{\text{シ}}\right)^2>0,\ \boxed{\text{ス}}a_k>0$$

したがって

$$a_{k+1}-\boxed{\text{サ}}>0 \quad \text{すなわち} \quad a_{k+1}>\boxed{\text{サ}}$$

よって，$n=\boxed{\text{セ}}$ のときにも（＊）が成り立つ。

［1］，［2］より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

(2)　$$a_n-a_{n+1}=a_n-\left(\frac{a_n}{2}+\frac{8}{a_n}\right)=\frac{\boxed{\text{ソ}}}{2a_n}$$

(1)より，$a_n>4$ であるから　$\dfrac{\boxed{\text{ソ}}}{2a_n}>\boxed{\text{タ}}$

よって　$a_n>a_{n+1}$

［$\boxed{\text{サ}}$ の選択肢］

①　1　②　a_{k-1}　③　a_k　④　4

［$\boxed{\text{セ}}$ の選択肢］

①　$n-1$　②　$n+1$

③　$k-1$　④　k　⑤　$k+1$

［$\boxed{\text{ソ}}$ の選択肢］

①　a_n+4　②　a_n-4

③　${a_n}^2+16$　④　${a_n}^2-16$

第 5 講　確率分布

PART1　二項分布の期待値と分散

1　n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は 1 回ごとに確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ただし，$0<p<1$ とする。n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を X，n 回移動した後の点 A の座標を Y とする。

(1)　$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の分布，期待値，分散を求めよ。

(2)　確率変数 X の期待値，分散を求めよ。

(3)　確率変数 Y の期待値，分散を求めよ。

Point Pickup

確率変数 X が右の表の確率分布に従うとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

期待値　$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$

$$=\sum_{k=1}^{n} x_kp_k$$

分散　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると

期待値　$E(X)=np$

分散　$V(X)=npq$

確率変数 X と定数 a，b について，$Y=aX+b$ とすると

期待値　$E(Y)=E(aX+b)=aE(X)+b$

分散　$V(Y)=V(aX+b)=a^2\,V(X)$

標準偏差　$\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第 5 講　PART1　確認問題

n を自然数とする。4 と書かれたカードと -2 と書かれたカードが多数入っている箱からカードを 1 枚取り出すとき，4 のカードを取り出す確率を p，-2 のカードを取り出す確率を $1-p$ とする。ただし，$0<p<1$ とする。

この箱からカードを 1 枚取り出し，書かれた数を記録して箱の中に戻す操作を n 回繰り返す。このとき，4 のカードを取り出した回数を X，記録された数の総和を Y とする。

1　$p=\dfrac{1}{4}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の分布，期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$ を求めよ。

Y の確率分布

Y	-4	ア	8	計
P	イ	ウ	エ	1

$E(Y)=$ オカ

$V(Y)=\dfrac{\text{キク}}{\text{ケ}}$

[イ ～ エ の選択肢]

① $\dfrac{1}{4}$　② $\dfrac{2}{4}$　③ $\dfrac{3}{4}$

④ $\dfrac{1}{16}$　⑤ $\dfrac{3}{16}$　⑥ $\dfrac{5}{16}$

⑦ $\dfrac{6}{16}$　⑧ $\dfrac{9}{16}$　⑨ $\dfrac{13}{16}$

2 確率変数 X の期待値 $E(X)$，分散 $V(X)$，および，Y の期待値 $E(Y)$，分散 $V(Y)$ をそれぞれ求めよ。

$E(X)=$ [コ]　　$V(X)=$ [サ]

$E(Y)=$ [シ]　　$V(Y)=$ [ス]

① np　　② $6np$

③ $n(1-p)$　　④ $6n(1-p)$

⑤ $6np-2n$　　⑥ np^2

⑦ $n(1-p)^2$　　⑧ $np(1-p)$

⑨ $6np(1-p)$　　⑩ $36np(1-p)$

【MEMO】

PART2　連続型確率変数の期待値と標準偏差

2　a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0)\\ \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a)\end{cases}$$

であるとする。

(1)　$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率を求めよ。

(2)　X の期待値，標準偏差を求めよ。

(3)　$Y=3X+7$ とするとき，Y の期待値，標準偏差を求めよ。

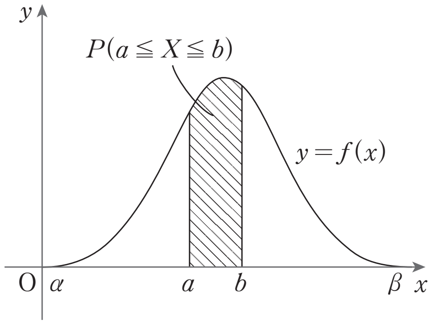
Point Pickup

連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)\,(\alpha \leqq x \leqq \beta)$

とすると

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx=1$$



確率変数 X の

期待値　$E(X)=m=\displaystyle\int_\alpha^\beta xf(x)dx$

分散　$V(X)=\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-m)^2 f(x)dx=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

第5講　PART2　確認問題

a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $-2a \leqq x \leqq 3a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{5a^2}(x+2a) & (-2a \leqq x \leqq 0) \\ \dfrac{2}{15a^2}(3a-x) & (0 \leqq x \leqq 3a) \end{cases}$$

であるとする。

1　$-a \leqq X \leqq a$ となる確率を求めよ。

$$\frac{\boxed{アイ}}{\boxed{ウエ}}$$

2　X の期待値 $E(X)$，標準偏差 $\sigma(X)$ を求めよ。

また，$Y=-6X-5$ とするとき，Y の期待値 $E(Y)$，標準偏差 $\sigma(Y)$ を求めよ。

$$E(X)=\frac{a}{\boxed{オ}} \qquad \sigma(X)=\frac{\sqrt{\boxed{カキ}}}{\boxed{ク}}a$$

$$E(Y)=\boxed{ケコ}a-\boxed{サ} \qquad \sigma(Y)=\sqrt{\boxed{シス}}\,a$$

PART3　二項分布の正規分布による近似

3　a を 3 以上の整数とする。2，4，6，……，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から 3 枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横 1 列に並べる試行を T とする。試行 T において，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。

試行 T を 180 回繰り返すとき，事象 A が起こる回数が 18 回以上 36 回以下である確率を，小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ。

Point Pickup

二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従うとみなしてよい。

特に，$Z=\dfrac{X-m}{\sigma}=\dfrac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990

第 5 講　PART3　確認問題

1　5 本のくじの中に 2 本の当たりくじが入っている。このくじから同時に 2 本のくじを引き，当たりかどうかを調べて元に戻す試行を T とする。試行 T において，2 本とも当たりである事象を A とする。
試行 T を 2500 回繰り返すとき，事象 A が起こる回数が 274 回以下である確率を求めよ。
ただし，次の＜正規分布表＞を用い，確率は，小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ。

0.［アイ］

＜正規分布表＞

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[MEMO]

第 6 講　統計的な推測

PART1　母平均の推定

1　ある市立図書館における高校生の利用状況について調査を行った。
この図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1回あたりの利用時間(分)を表す確率変数を W とし，W は母平均 m，母標準偏差 30 の分布に従うとする。
この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，……，W_n を無作為に抽出する。
利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 60,\ U_2 = W_2 - 60,\ \cdots\cdots,\ U_n = W_n - 60$$

とおく。

(1)　U_1 の平均 $E(U_1)$，標準偏差 $\sigma(U_1)$ を求めよ。

(2)　この母集団から無作為に抽出された 100 人の生徒に対して，U_1，U_2，……，U_{100} の値を調べたところ，その標本平均の値が 50 分であった。$t = m - 60$ として，t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

Point Pickup

母平均が m，母標準偏差が σ である母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

※ n が十分に大きいときは，母標準偏差 σ の代わりに標本標準偏差 S を用いてもよい。

※母平均 m に対して信頼度 95% の信頼区間を求めることを，母平均 m を信頼度 95% で推定する，ということがある。

第 6 講　PART1　確認問題

ある農場ではトマトを生産している。

この農場で今年生産されたトマト全体を母集団とする。トマト 1 個の重さ (g) を表す確率変数を W とし，W は母平均 m，母標準偏差 32 の分布に従うとする。この母集団から大きさ n の標本 W_1，W_2，……，W_n を無作為に抽出する。

重さが 180g からどの程度異なるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 180,\ U_2 = W_2 - 180,\ \cdots\cdots,\ U_n = W_n - 180$$

とおく。

1　U_1 の平均 $E(U_1)$，標準偏差 $\sigma(U_1)$ を求めよ。

$E(U_1) =$ [ア]　　$\sigma(U_1) =$ [イウ]

[[ア] の選択肢]

① 180　② m　③ $180m$

④ $m+180$　⑤ $m-180$

2　この母集団から無作為に抽出された 400 個のトマトに対して，U_1，U_2，……，U_{400} の値を調べたところ，その標本平均の値が 100g であった。$t = m - 180$ として，t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。ただし，小数第 2 位を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

[エオ].[カ] $\leqq t \leqq$ [キクケ].[コ]　単位は g

PART2　母比率の推定

2 ある市の全家庭から3600家庭を無作為抽出し，新規導入予定のゴミ分別制度への賛否を調査したところ，2304家庭が賛成と回答した。

(1) この市の全家庭における賛成の母比率 p を信頼度95%で推定せよ。結果は小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求めよ。

(2) この市の全家庭における賛成の母比率 p を信頼度99%で推定せよ。結果は小数第4位を四捨五入して小数第3位まで求めよ。

(3) 母比率 p に対する信頼度 r% の信頼区間を $A \leqq p \leqq B$ とするとき，この信頼区間の幅を $B-A$ と定める。母比率 p に対する信頼度95%の信頼区間の幅を，信頼度を変えずに(1)における信頼区間と比べて半分にしたい。標本の大きさを何倍にすればよいか。

Point Pickup

母比率 p に対して信頼度95%の信頼区間を求めることを，母比率 p を信頼度95%で推定する，ということがある。

標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本比率を R とすると，母比率 p に対する

信頼度95%の信頼区間は　$R-1.96\cdot\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R+1.96\cdot\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

信頼度99%の信頼区間は　$R-2.58\cdot\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}} \leqq p \leqq R+2.58\cdot\sqrt{\dfrac{R(1-R)}{n}}$

第 6 講　PART2　確認問題

1 あるテレビ番組を放送している地域の全世帯から 1600 世帯を無作為抽出し，その番組を視聴したかどうか調べたところ，320 世帯が視聴していたことがわかった。

(1) この地域の全世帯において番組を視聴した世帯の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ。結果は小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求めよ。

[ア] $\leqq p \leqq$ [イ]

(2) この地域の全世帯において番組を視聴した世帯の母比率 p を信頼度 99% で推定せよ。結果は小数第 4 位を四捨五入して小数第 3 位まで求めよ。

[ウ] $\leqq p \leqq$ [エ]

[[ア]～[エ]の選択肢]

① 0.162　② 0.174　③ 0.180　④ 0.191
⑤ 0.210　⑥ 0.220　⑦ 0.226　⑧ 0.233

(3) 母比率 p に対する信頼度 r% の信頼区間を $A \leqq p \leqq B$ とするとき，この信頼区間の幅を $B-A$ と定める。母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間の幅を，信頼度を変えずに(1)における信頼区間と比べて $\frac{1}{3}$ にしたい。標本比率が変わらないとすると，標本の大きさを何倍にすればよいか。

[オ] 倍にすればよい

[[オ]の選択肢]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 9
⑥ $\frac{1}{2}$　⑦ $\frac{1}{3}$　⑧ $\frac{1}{4}$　⑨ $\frac{1}{9}$

(4) 母比率 p に対する信頼区間の幅を，標本を変えずに(1)における信頼区間と比べて $\frac{1}{3}$ にしたい。信頼度を何％にすればよいか。次の < 正規分布表 > を用い，答えは，小数第１位を四捨五入して整数で求めよ。

カキ ％にすればよい

< 正規分布表 >

u	.00	.01	.02	.03	.04	.05
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

[MEMO]

PART3　仮説検定

3　ある食品工場で製造されている袋入り小麦粉の重量の表示重量は 500 g であり，これを母平均とする。この工場で製造工程を変更した際に，重量の母平均が変化したかを調査することとした。変更後に製造された袋入り小麦粉から無作為に 16 袋を抽出したところ，重量の標本平均が 505 g，標本標準偏差が 10 g であった。母集団分布が正規分布に従うとき，変更後の重量の母平均は変化したと判断してよいか。有意水準 5% で検定せよ。

Point Pickup

仮説検定の主な流れは以下

① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。

② 有意水準に従い，H_0 のもとで棄却域を求める。

③ 標本調査の結果から得られた確率変数の値が棄却域に入るか入らないかを判断する。

・棄却域に入る場合は，H_0 を棄却し，H_1 を採択する。

・棄却域に入らない場合は，H_0 を棄却できない。

第 6 講　PART3　確認問題

1 全国の高校生を対象に行った模擬試験において，数学の平均は 62 点であった。A 市でこの模擬試験を受験した高校生から無作為に抽出した 144 人の数学の平均は 66 点，標準偏差は 30 点であった。A 市で模擬試験を受験した高校生の母平均は全国の平均より高いと判断してよいか。有意水準 5%で検定せよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。必要に応じて次ページの < 正規分布表 > を用いてよい。

A 市で模擬試験を受験した高校生の母平均を m とする。

　対立仮説 H_1 は $\boxed{\text{ア}}$

　帰無仮説 H_0 は $\boxed{\text{イ}}$

H_0 が正しいとするとき，標本の大きさ 144 は十分大きいから，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に $N\left(\boxed{\text{ウ}},\ \boxed{\text{エ}}^2\right)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}$ とおくと，Z は近似的に $N(0,\ 1)$ に従う。

棄却域は $\boxed{\text{オ}}$

$\overline{X}=\boxed{\text{カ}}$ のとき　$Z=\boxed{\text{キ}}$

よって，Z の値は棄却域に $\boxed{\text{ク}}$。

よって，母平均 m は，$\boxed{\text{ケ}}$。

[$\boxed{\text{ア}}$，$\boxed{\text{イ}}$ の選択肢]

①　$m=62$　　②　$m \fallingdotseq 62$

③　$m<62$　　④　$m>62$

[ウ , エ , カ , キ の選択肢]

① 0.2　② 1.6　③ 2.5　④ 12

⑤ 30　⑥ 62　⑦ 66　⑧ 144

[オ の選択肢]

① $Z \geqq 1.64$　② $Z \geqq 1.96$　③ $Z \leqq 1.64$

④ $Z \leqq 1.96$　⑤ $Z \leqq -1.64$，$1.64 \leqq Z$

⑥ $Z \leqq -1.96$，$1.96 \leqq Z$

[ク の選択肢]

① 入るから，H_0 を棄却できる

② 入るから，H_0 は棄却できない

③ 入らないから，H_0 を棄却できる

④ 入らないから，H_0 は棄却できない

[ケ の選択肢]

① 全国の平均より高いと判断できる

② 全国の平均より高いとは判断できない

< 正規分布表 >

u	.02	.03	.04	.05	.06	.07
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
0.9	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.6	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
1.9	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

【MEMO】

第 7 講　平面上のベクトル，ベクトルの成分表示

PART1　ベクトルの分解

1　正六角形 ABCDEF において，その中心を O，線分 OC の中点を G，線分 OE を $2:1$ に内分する点を H とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{GH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

Point Pickup

正 n 角形の中心とは，正 n 角形の外接円の中心である。

2 つのベクトルの和や差を用いて

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB},\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$$

のようにベクトルを「分割」し，$\vec{a}$，$\vec{b}$ または，これらに平行なベクトルで表すことができる。

第 7 講　PART1　確認問題

1　正六角形 ABCDEF において，その中心を O，線分 OE の中点を G，線分 OF を 3：1 に内分する点を H とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，次のベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(1)　$\overrightarrow{BE}=$ [ア]

(2)　$\overrightarrow{FE}=$ [イ]

(3)　$\overrightarrow{DB}=$ [ウ]

[[ア]～[ウ] の選択肢]

① $2\vec{a}$　② $2\vec{b}$　③ $\vec{a}+\vec{b}$

④ $\vec{a}-\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}+\vec{b}$　⑥ $\vec{a}+2\vec{b}$

⑦ $-\vec{a}-2\vec{b}$　⑧ $2\vec{a}-\vec{b}$　⑨ $-2\vec{a}-\vec{b}$

(4)　$\overrightarrow{CG}=$ [エ]

(5)　$\overrightarrow{GH}=$ [オ]

[[エ], [オ] の選択肢]

① $-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$　② $\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$　③ $-\vec{a}-\frac{3}{4}\vec{b}$

④ $\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}$　⑤ $\frac{3}{4}\vec{a}+\frac{1}{4}\vec{b}$　⑥ $-\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

PART2　ベクトルの成分と平行，座標と成分表示

2　[1]　(1)　$|\vec{a}|=2$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ において，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x の値を求めよ。また，このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

[2]　4点 A$(1,\ 2)$，B$(3,\ 5)$，C$(4,\ 8)$，D$(x,\ y)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ。

(2)　4点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるように x，y の値を定めよ。

Point Pickup

[1]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$ のとき

$\vec{a}\parallel\vec{b}$　$\Longleftrightarrow$　$\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する

$\Longleftrightarrow$　$a_1b_2-a_2b_1=0$

$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ である。

[2]　A$(a_1,\ a_2)$，B$(b_1,\ b_2)$ のとき

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

四角形 ABCD が平行四辺形　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

第 7 講　PART2　確認問題

1 $|\vec{a}|=\dfrac{1}{3}$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。選択肢は最も適切なものを選べ。

ア

① $\vec{a}$　② $-\vec{a}$　③ $\vec{a},\ -\vec{a}$

④ $\dfrac{1}{3}\vec{a}$　⑤ $-\dfrac{1}{3}\vec{a}$　⑥ $\dfrac{1}{3}\vec{a},\ -\dfrac{1}{3}\vec{a}$

⑦ $3\vec{a}$　⑧ $-3\vec{a}$　⑨ $3\vec{a},\ -3\vec{a}$

2 $\vec{a}=(3,\ t)$, $\vec{b}=(-4,\ 8)$ において，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行であるとき，実数 t の値を求めよ。また，このとき，$|2\vec{a}+\vec{b}|:|\vec{a}+2\vec{b}|$ を求めよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

$t=$ イウ

$|2\vec{a}+\vec{b}|:|\vec{a}+2\vec{b}|=$ エ : オ

3 4 点 A(5, 3), B(1, 2), C(2, −1), D(x, y) について，次の問いに答えよ。

(1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるように x, y の値を定めよ。

$(x,\ y)=($ カ , キ $)$

(2) 4 点 A, B, C, D が平行四辺形の頂点となるように x, y の値を定めよ。

$(x,\ y)=($ ク , ケ $)$, $($ コサ , シス $)$,

$($ セ , ソ $)$

ただし，ク $>$ セ とする。

PART3　ベクトルの成分と大きさ，分解

3　$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく。$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ。また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

(2)　$\vec{c}=(5,\ 4)$ を，$s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

Point Pickup

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$|\vec{a}|=\sqrt{{a_1}^2+{a_2}^2}$$

$$\vec{a}=\vec{b} \iff a_1=b_1 \text{ かつ } a_2=b_2$$

第７講　PART3　確認問題

$\vec{a}=(4,\ 3)$，$\vec{b}=(1,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ。

1　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく。

(1)　$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{10}$ となるような k の値を求めよ。

$k=$ [アイ]，[ウエ]

ただし，[アイ] $<$ [ウエ] とする。

(2)　$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

$\sqrt{\fbox{オ}}$

2　$\vec{c}=(11,\ 2)$ を $s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表したとき，実数 s，t の値を求めよ。

$s=$ [カ]，$t=$ [キク]

第 8 講　ベクトルの内積

PART1　ベクトルの内積

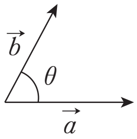
1　1辺の長さが2である正方形ABCDにおいて，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(3)　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$　(4)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}$

Point Pickup

$\vec{0}$ でない2つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



2つのベクトルの始点を揃え，なす角 θ を考える。また，$0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ である。

第 8 講　PART1　確認問題

AB＝1，BC＝$\sqrt{3}$ である長方形 ABCD において，次の内積を求めよ。

1 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}=$ [ア]

2 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}=$ [イ]

3 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}=$ [ウエ]

4 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}=$ [オカ]

PART2　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

2　(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$ と $\vec{b}=(2,\ k)$ のなす角が $45°$ であるとき，k の値を求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ。

Point Pickup

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

とくに　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第 8 講　PART2　確認問題

1　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(k,\ 1)$ のなす角が 60°であるとき，k の値を求めよ。

$$k=\boxed{アイ}+\sqrt{\boxed{ウ}}$$

2　ベクトル $\vec{a}=(3,\ 4)$ と垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

$$\vec{n}=\left(\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オ}},\ \frac{\boxed{カキ}}{\boxed{ク}}\right),\ \left(\frac{\boxed{ケコ}}{\boxed{サ}},\ \frac{\boxed{シ}}{\boxed{ス}}\right)$$

PART3　ベクトルの大きさと内積

3　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2)　$\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような実数 t の値を求め，その最小値を求めよ。

Point Pickup

$s\vec{a}+t\vec{b}$ (s，t は実数) の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$$

である。よって，3 つのベクトルの大きさ $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，$|s\vec{a}+t\vec{b}|$ から，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めることができる。

第 8 講　PART3　確認問題

1　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{\boxed{\text{アイ}}}{\boxed{\text{ウ}}},\quad \theta=\boxed{\text{エ}}$$

[エ の選択肢]

① 30°　② 45°　③ 60°　④ 90°

⑤ 120°　⑥ 135°　⑦ 150°

(2)　$4\vec{a}+\vec{b}$ の大きさを求めよ。

$$|4\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{\boxed{\text{オ}}}$$

(3)　$\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような実数 t の値を求め，その最小値を求めよ。

$$t=\frac{\boxed{\text{カ}}}{\boxed{\text{キ}}}\text{ のとき　最小値 }\frac{\boxed{\text{ク}}}{\boxed{\text{ケ}}}$$

第 9 講　位置ベクトル

PART1　位置ベクトル

1　3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺BCを2：3に内分する点をD，辺BCを1：2に外分する点をE，△ABCの重心をG，△AEDの重心をG′とする。

次の問いに答えよ。

(1)　点G，点G′の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

Point Pickup

2点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ を結ぶ線分ABを

$m:n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は　$\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$

$m:n$ に外分する点Qの位置ベクトル $\vec{q}$ は　$\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

3点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$，C$(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心Gの位置ベクトル $\vec{g}$ は

$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

第 9 講　PART1　確認問題

1　3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 AB を 3：1 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△CDE の重心を G′ とする。また，点 D，E，G，G′ の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{g}$，$\vec{g'}$ とする。次の問いに答えよ。選択肢は最も適切なものを選べ。

(1)　$\vec{g}$，$\vec{g'}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\vec{g}=$ ア　　　$\vec{g'}=$ イ

[ア の選択肢]

① $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　② $3\vec{a}+3\vec{b}+3\vec{c}$

③ $\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$

[イ の選択肢]

① $\frac{5}{18}\vec{a}-\frac{5}{18}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　② $\frac{5}{18}\vec{a}-\frac{5}{18}\vec{b}+3\vec{c}$

③ $-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{13}{18}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$　　④ $-\frac{1}{18}\vec{a}+\frac{13}{18}\vec{b}+\vec{c}$

⑤ $\frac{1}{36}\vec{a}+\frac{17}{36}\vec{b}+\vec{c}$　　⑥ $\frac{1}{36}\vec{a}+\frac{17}{36}\vec{b}+3\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{GG'}=$ ウ

[ウ の選択肢]

① $\frac{5}{36}\vec{a}-\frac{5}{36}\vec{b}$　　② $-\frac{7}{18}\vec{a}+\frac{7}{18}\vec{b}$

③ $\frac{7}{36}\vec{a}-\frac{7}{36}\vec{c}$　　④ $-\frac{5}{36}\vec{a}+\frac{5}{36}\vec{c}$

⑤ $\frac{11}{18}\vec{b}-\frac{11}{18}\vec{c}$　　⑥ $-\frac{13}{18}\vec{b}+\frac{13}{18}\vec{c}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}+\overrightarrow{\mathrm{G'E}}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

（証明）

$$\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}+\overrightarrow{\mathrm{G'E}}=\boxed{\text{エ}}+\boxed{\text{オ}}+(\vec{e}-\vec{g'})$$
$$=\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{キ}}\,\vec{g'}$$
$$=\boxed{\text{カ}}-\boxed{\text{ク}}=\vec{0}$$

[エ の選択肢]

①　$(\vec{c}+\vec{g'})$　②　$(\vec{c}-\vec{g'})$　③　$(\vec{g'}-\vec{c})$

[オ の選択肢]

①　$(\vec{d}+\vec{g'})$　②　$(\vec{d}-\vec{g'})$　③　$(\vec{g'}-\vec{d})$

[カ の選択肢]

①　$(\vec{c}+\vec{d})$　②　$(\vec{d}+\vec{e})$　③　$(\vec{e}+\vec{c})$

④　$-(\vec{c}+\vec{d})$　⑤　$-(\vec{d}+\vec{e})$　⑥　$-(\vec{e}+\vec{c})$

⑦　$(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$　⑧　$-(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$

[ク の選択肢]

①　$\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}\right)$　②　$(\vec{c}+\vec{d})$

③　$\left(\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)$　④　$(\vec{d}+\vec{e})$

⑤　$\left(\frac{1}{3}\vec{e}+\frac{1}{3}\vec{c}\right)$　⑥　$(\vec{e}+\vec{c})$

⑦　$\left(\frac{1}{3}\vec{c}+\frac{1}{3}\vec{d}+\frac{1}{3}\vec{e}\right)$　⑧　$(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})$

[MEMO]

PART2　分点を表す位置ベクトル

2　△ABC と, 三角形の内部の点 P に関して, 等式 $4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立つ。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

(2)　△PBC，△PCA，△PAB の面積の比を求めよ。

Point Pickup

点 B，C，P の点 A を始点とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とするとき

$$\vec{p}=k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c}\right)$$

（$\frac{n}{m+n}$ と $\frac{m}{m+n}$：和が 1）

の形の式を導くことにより，点 P の位置を，線分 BC を内分または外分する点を用いて表すことができる。

第 9 講　PART2　確認問題

1　△ABC と，三角形の内部の点 P に関して，等式 $3\overrightarrow{PA}+5\overrightarrow{PB}+7\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ が成り立つ。このとき，次の問いに答えよ。ただし，最も簡単な整数の比で答えよ。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

『辺 BC を［ア］：［イ］に内分する点を Q とすると，点 P は線分 AQ を［ウ］：［エ］に内分する点である。』

(2)　△PBC，△PCA，△PAB の面積の比を求めよ。

△PBC：△PCA：△PAB＝［オ］：［カ］：［キ］

PART3　共線条件

3　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：2 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。

Point Pickup

3 点 A，B，P が一直線上にある

$\iff$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

第 9 講　PART3　確認問題

1　平行四辺形 ABCD において，辺 BC を 4：1 に外分する点を E，対角線 BD を 4：3 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は 一直線上にあることを証明せよ。

（証明）

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

BF：FD＝4：3 より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{b}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{d}$$

BC：BE＝$\boxed{オ}$：4 より

$$\overrightarrow{AE}=\vec{b}+\frac{\boxed{カ}}{\boxed{キ}}\vec{d}$$

よって，$\overrightarrow{AF}=\dfrac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}\overrightarrow{AE}$ より，3 点 A，F，E は一直線上にある。

第10講　ベクトルと平面図形

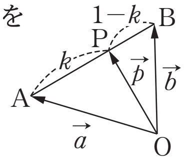
PART1　交点の位置ベクトル

1　[1]　△OAB の辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 4：1 に内分する点を D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

[2]　△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，AM と CD の交点を E とする。$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

Point Pickup

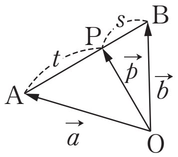
[1]　線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると



$$\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\quad(0<k<1)$$

と表される。これを利用し，2 直線の交点を表す位置ベクトルを，1 次独立である 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて 2 通りに表し，その係数を比較することで求めることができる。

[2]　点 P が直線 AB 上にあるとき，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると



$s+t=1$

$$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b},\ s+t=1$$

と表される。すなわち，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表したときの $\vec{a}$，$\vec{b}$ の係数の和が 1 である。

とくに，$0<s<1$，$0<t<1$ のとき，AP：PB$=t:s$ である。

第10講　PART1　確認問題

1　△OAB の辺 OA の中点を C，辺 OB を 3：2 に内分する点を D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OP}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{エ}}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{OQ}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}$$

2　△ABC の辺 AC を 3：2 に内分する点を D，辺 BC を 3：1 に内分する点を E とし，AE と BD の交点を F とする。$\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AF}=\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\overrightarrow{AB}+\frac{\boxed{サ}}{\boxed{シ}}\overrightarrow{AC}$$

PART2　正多角形

2　1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，辺 BC の中点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FG}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　点 H を辺 DE 上の点とする。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{FG}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分 DH の長さを求めよ。

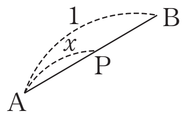
(3)　(2)のとき AH と FG の交点を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

Point Pickup

正多角形に関する問題は，平行な線分に注目し，ベクトルを用いて解く方法がある。

線分 AB 上の点 P について，AB＝1，AP＝x とすると

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$ である。



第10講　PART2　確認問題

1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，辺 AB を 3：1 に内分する点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

1　$\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{GE}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{BC}=\boxed{ア}$$

$$\overrightarrow{GE}=\frac{\boxed{イ}}{\boxed{ウ}}\vec{a}+\boxed{エ}\vec{b}$$

[ア の選択肢]

① $2\vec{a}$　② $2\vec{b}$
③ $\vec{a}+\vec{b}$　④ $\vec{a}-\vec{b}$　⑤ $-\vec{a}+\vec{b}$
⑥ $\vec{a}+2\vec{b}$　⑦ $2\vec{a}+\vec{b}$

2　(1)　点 H を辺 BC 上の点とする。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{GE}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，BH の長さを求めよ。

$$\overrightarrow{AH}=\frac{\boxed{オ}}{\boxed{カ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{カ}}\vec{b},\ BH=\frac{\boxed{ク}}{\boxed{ケ}}$$

(2)　(1)のとき，直線 AH と GE の交点を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{AI}=\frac{\boxed{コサ}}{\boxed{シス}}\vec{a}+\frac{\boxed{セ}}{\boxed{シス}}\vec{b}$$

PART3　三角形の面積

3 (1) △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，△OAB の面積を S とする。

(i) S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(ii) (i)の結果を利用し，S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ。

(2) A(1，−1)，B(2，1)，C(4，3) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。

Point Pickup

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，△OAB の面積 S は　$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\sin\theta$ である。

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$ を用いて，S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表すことができる。

第10講　PART3　確認問題

1　3点 A(2, 2), B(7, 3), C(−4, 6) を頂点とする三角形ABCの面積 S を求めよ。

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{\boxed{アイ}}$,　$|\overrightarrow{AC}|=\boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エオ}}$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{カキク}$ より

$S=\boxed{ケコ}$

第 11 講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

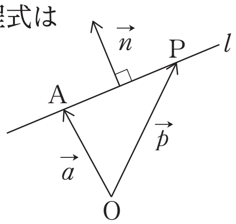
1 (1)　点 A$(-2,\ 1)$ を通り，直線 l：$3x-5y+4=0$ に平行な直線を g，垂直な直線を h とする。g と h の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　法線ベクトルを利用し，2 直線 $3x+y+6=0$ と $x+2y-5=0$ のなす鋭角を求めよ。

Point Pickup

(1)　点 A$(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は

$$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$$



$\vec{n}$ を，この直線の法線ベクトルという。

直線 l：$ax+by+c=0$ は，$\vec{n}=(a,\ b)$ を法線ベクトルにもつ。

(2)　2 直線の法線ベクトルのなす角を $\alpha\,(0^\circ \leqq \alpha \leqq 180^\circ)$ とすると，2 直線のなす角 θ は

$0^\circ \leqq \alpha \leqq 90^\circ$ のとき　$\theta=\alpha$

$90^\circ < \alpha \leqq 180^\circ$ のとき　$\theta=180^\circ-\alpha$

第11講　PART1　確認問題

1 点 A(2, -3) を通り，直線 l：$5x+2y+4=0$ に平行な直線を g，垂直な直線を h とする。g と h の方程式をそれぞれ求めよ。

直線 l の法線ベクトルの１つは $\vec{n}=$ [ア] であり

直線 g の方程式は [イ]$x+$[ウ]$y-$[エ]$=0$

一方，直線 h の法線ベクトルの１つは $\vec{m}=$ [オ] であり

直線 h の方程式は [カ]$x-$[キ]$y-$[クケ]$=0$

[[ア], [オ]の選択肢]

① (5, 2)　　② (2, 5)

③ (5, -2)　　④ (2, -5)

2 法線ベクトルを利用し，２直線 $x+\sqrt{3}\,y+4=0$ と $\sqrt{2}\,x-\sqrt{6}\,y-1=0$ のなす鋭角 α を求めよ。

$\alpha=$ [コサ]°

PART2　円のベクトル方程式

2 (1) 2点 A(3, 0), B(1, 4) を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

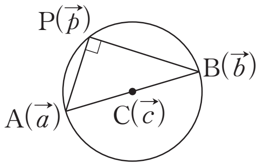
(2) △OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=4$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

Point Pickup

(1) 中心 $\mathrm{C}(\vec{c})$，半径 r の円のベクトル方程式は $|\vec{p}-\vec{c}|=r$

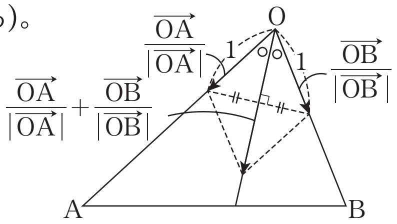
$\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする

円のベクトル方程式は $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$



(2) △OAB において，∠AOB の二等分線を表すベクトル方程式は

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}\right)$$ (ただし k は実数とする)。



第11講　PART2　確認問題

1　2点 A$(4,\ -1)$，B$(-2,\ -3)$ を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

求める円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\boxed{\text{ア}}$$

であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(x-\boxed{\text{イ}},\ y+\boxed{\text{ウ}}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(x+\boxed{\text{エ}},\ y+\boxed{\text{オ}}\right)$$

であるから

$$\left(x-\boxed{\text{カ}}\right)^2+\left(y+\boxed{\text{キ}}\right)^2=\boxed{\text{クケ}}$$

2　△OAB において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=6$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=5$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=18$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

$$\vec{c}=\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}}\vec{a}+\frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\vec{b}$$

PART3　ベクトルの終点の存在範囲

3　△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たすとき，点Pの存在範囲を求めよ。

(1)　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$　　(2)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$，$1\leqq s+t\leqq 2$

Point Pickup

△OAB において，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で表される点Pの存在範囲は以下

$s+t=1$ … 直線AB

$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ … 線分AB

$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ … △OAB の周および内部

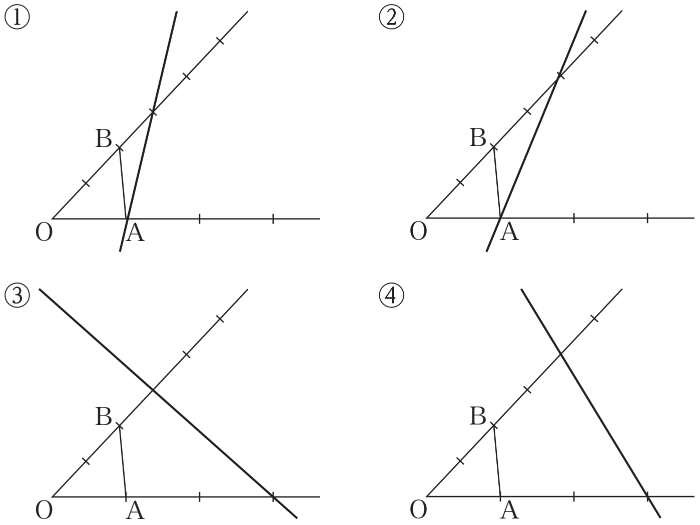
$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ … $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，平行四辺形OACB の周および内部

第11講　PART3　確認問題

△OAB に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たすとき，点 P の存在範囲を求めよ。

1　$s+2t=3$

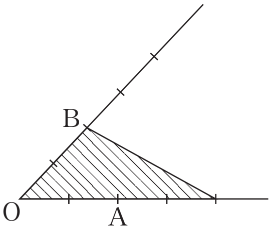
［ア］の太線部分



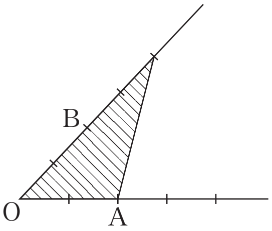
2　$s \geqq 0,\ t \geqq 0,\ 1 \leqq 2s+t \leqq 2$

[イ] の斜線部分の周および内部

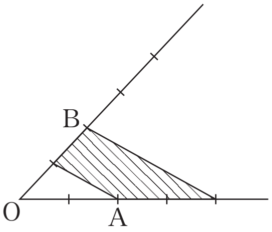
①



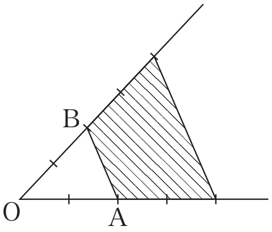
②



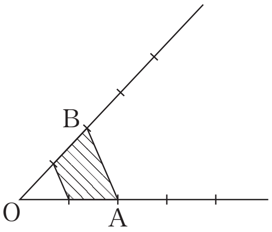
③



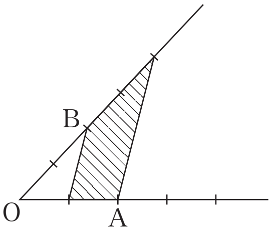
④



⑤



⑥



【MEMO】

第 12 講　空間のベクトル

PART1　空間の座標

1
(1)　3 点 A(3, 2, 0), B(−1, 4, −2), C(2, 0, −1) から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

(2)　2 点 A(2, −1, 1), B(1, 4, 3) と，xy 平面上の点 P に対して，AP＋PB の最小値を求めよ。

Point Pickup

2 点 $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ 間の距離は

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

(1)　座標空間において

xy 平面上の点：$(x, y, 0)$　　yz 平面上の点：$(0, y, z)$　　zx 平面上の点：$(x, 0, z)$

と表すことができる。

(2)　折れ線の長さの最小値は，座標平面に関して対称な点をとり，線分の長さを考える。

$P(a, b, c)$ と各座標平面に関して対称な点の座標は，次のように表される。

xy 平面：$(a, b, -c)$　　yz 平面：$(-a, b, c)$　　zx 平面：$(a, -b, c)$

第12講　PART1　確認問題

1　3 点 A$(-1,\ 1,\ -1)$，B$(4,\ 0,\ 3)$，C$(3,\ 2,\ 2)$ から等距離にある xy 平面上の点 P の座標を求めよ。

P(ア ， イウ ， エ)

2　2 点 A$(1,\ 1,\ 4)$，B$(3,\ 3,\ 0)$ と，zx 平面上の点 P に対して，AP＋PB の最小値を求めよ。

最小値　オ

PART2　空間ベクトルの内積

2　直方体 ABCD－EFGH において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AD}=2$，$\mathrm{AE}=1$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ。

Point Pickup

空間におけるベクトルにおいても，平面の場合と同様，2 つのベクトルの和や差を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}},\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

のようにベクトルを分割し，指定されたベクトルを用いて表すことができる。

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \iff \cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

第12講　PART2　確認問題

1　直方体 ABCD-EFGH において，$\mathrm{AB}=\sqrt{11}$，$\mathrm{AD}=4$，$\mathrm{AE}=3$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=$ [ア]，$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=$ [イ]

[[ア]，[イ] の選択肢]

①　$\vec{a}+\vec{b}$　　②　$\vec{b}+\vec{c}$　　③　$\vec{a}+\vec{c}$

④　$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$　　⑤　$\vec{a}+\vec{b}-\vec{c}$

⑥　$\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$　　⑦　$\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

(2)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ を求めよ。

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}=$ [ウエ]

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角 θ $(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ の大きさについて，不等式 [オ] が成り立つ。

[オ] に当てはまるものとして最も適切なものを選択肢から選べ。

[[オ] の選択肢]

①　$0^\circ<\theta<30^\circ$　　②　$30^\circ<\theta<45^\circ$

③　$45^\circ<\theta<60^\circ$　　④　$60^\circ<\theta<90^\circ$

⑤　$90^\circ<\theta<120^\circ$　　⑥　$120^\circ<\theta<135^\circ$

⑦　$135^\circ<\theta<150^\circ$　　⑧　$150^\circ<\theta<180^\circ$

PART3　三角形の面積，２つのベクトルに垂直な単位ベクトル

3 ［1］ A(2, 1, 3)，B(2, -2, 0)，C(4, 2, -4) とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

［2］ 2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

Point Pickup

［1］ $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

［2］ $\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$ について

$$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$$

が成り立つ。

第 12 講　PART3　確認問題

1　A(1, 1, 3), B(−1, 2, 1), C(−5, 3, 1) とするとき,
内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。また, △ABC の面積 S を求めよ。

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\boxed{\text{アイ}}$

$S=\boxed{\text{ウ}}\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$

2　2 つのベクトル $\vec{a}=(-2, 1, 1)$, $\vec{b}=(1, -1, 1)$ の両方
に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ を求めよ。

$$\vec{e}=\left(\frac{\boxed{\text{オ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}, \frac{\boxed{\text{ク}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}, \frac{\boxed{\text{ケ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}\right),$$
$$\left(-\frac{\boxed{\text{コ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}, -\frac{\boxed{\text{サ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}, -\frac{\boxed{\text{シ}}}{\sqrt{\boxed{\text{カキ}}}}\right)$$

第13講　空間図形とベクトル

PART1　位置ベクトル

1　1辺の長さが1の立方体ABCD－EFGHにおいて，辺AB，CG，HEを $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれP，Q，Rとし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角 θ を求めよ。

Point Pickup

平面と同様，空間においても，2点 $A(\vec{a})$，$B(\vec{b})$ に対して

線分ABを $m:n$ に内分する点Pの位置ベクトル $\vec{p}$ は

$$\vec{p}=\frac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\vec{a}+\frac{m}{m+n}\vec{b}$$

線分ABを $t:(1-t)$ に内分する点Qの位置ベクトル $\vec{q}$ は

$$\vec{q}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}$ (s，t，u は実数)の形で表されたベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|$ について

$$|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$$

である。

第13講　PART1　確認問題

1 1辺の長さが1の立方体 ABCD-EFGH において，辺 AB，GF，GC を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(1) $\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ を，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$\overrightarrow{PQ}=$ [ア]，$\overrightarrow{PR}=$ [イ]

[[ア]，[イ] の選択肢]

① $t\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}$　② $(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}$

③ $\vec{a}+t\vec{b}+(1-t)\vec{c}$　④ $\vec{a}+(1-t)\vec{b}+t\vec{c}$

⑤ $\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

⑥ $(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

⑦ $(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}$

⑧ $(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+(1-t)\vec{c}$

(2) $\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角を $\theta(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とするとき，$\cos\theta$ を t を用いて表せ。

$$\cos\theta=\frac{t^2-\boxed{\text{ウ}}\,t+\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}\,t^2-\boxed{\text{カ}}\,t+\boxed{\text{キ}}}$$

PART2　共線条件

2 (1) 3点 A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

(2) 四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とする。ある実数 k について，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は，2点 A，G を通る直線上にあることを証明せよ。

Point Pickup

3点 A，B，P が一直線上にある　$\Longleftrightarrow$　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する

第13講　PART2　確認問題

1　3 点 A$(3,\ -1,\ 2)$，B$(x,\ -3,\ 1)$，C$(-1,\ y,\ 4)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

$x=$ ア ，$y=$ イ

2 四面体 ABCD において，△BCD の重心を G とする。ある実数 k について，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ を満たす点 P は，2 点 A，G を通る直線上にあることを証明せよ。
選択肢は最も適切なものを選べ。

（証明）

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{エ}}}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdots\cdots(*)$$

$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}+\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より

$$\left(\boxed{\text{オ}}-k\right)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdots\cdots(**)$$

$k=\boxed{\text{オ}}$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\boxed{\text{カ}}$

このとき（$*$）より，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\boxed{\text{カ}}$ であるから不適。

よって　$k\neq\boxed{\text{オ}}$

（$**$）より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{\boxed{\text{オ}}-k}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdots\cdots(***)$$

（$*$），（$***$）より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{オ}}-k}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

ゆえに，3 点 A，G，P は一直線上にある。
したがって，点 P は，2 点 A，G を通る直線上にある。

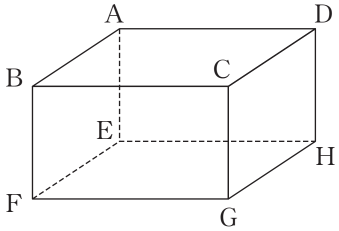
[$\boxed{\text{カ}}$ の選択肢]

①　$\vec{0}$　　②　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　　③　$\overrightarrow{\mathrm{GP}}$

[MEMO]

PART3　共面条件

3　直方体ABCD－EFGHにおいて，辺ADの中点をP，辺AEを2：7に内分する点をQ，辺DCを2：3に内分する点をR，辺CGを $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点をSとする。4点P，Q，R，Sが同一平面上にあるとき，t の値を求めよ。



Point Pickup

一直線上にない3点A，B，Cが定める平面ABCについて

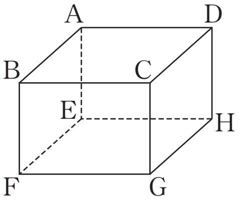
点Pが平面ABC上にある

$\iff$ $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する

$\iff$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ を満たす実数 s，t，u が存在する

第13講　PART3　確認問題

1　直方体 ABCD-EFGH において，辺 AB を $1:3$ に内分する点を P，辺 AD を $1:2$ に内分する点を Q，辺 DH の中点を R，辺 HG を $t:(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を S とする。4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，t の値を求めよ。



$t=\dfrac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}$

第 14 講　空間ベクトルの様々な問題，空間座標における図形

PART1　直線と平面の交点

1　四面体 OABC において，辺 OA，OB，OC を 2：1 に内分する点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，直線 BC′ と直線 B′C との交点を D，3 点 A′，B，C を通る平面と直線 AD の交点を E とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OD}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

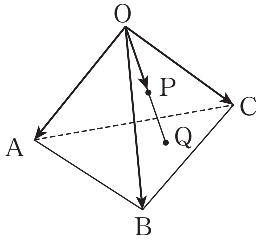
Point Pickup

4 点 O，A，B，C が同一平面上にないとする。このとき，
直線 OP が平面 ABC と交わる点を Q とすると

・点 Q は直線 OP 上にある

・点 Q は平面 ABC 上にある

これらを用いて，点 Q を表す位置ベクトルを求めることができる。



第14講　PART1　確認問題

1 四面体OABCにおいて，辺OAの中点をA′，辺OBを3：2に内分する点をB′，辺OCを7：4に内分する点をC′とし，直線AB′と直線A′Bの交点をD，3点A，B，C′を通る平面と直線CDの交点をEとする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OD}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OD}=\frac{\boxed{ア}}{\boxed{イ}}\vec{a}+\frac{\boxed{ウ}}{\boxed{イ}}\vec{b}$$

(2) $\overrightarrow{OE}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

$$\overrightarrow{OE}=\frac{\boxed{エ}}{\boxed{オカ}}\vec{a}+\frac{\boxed{キ}}{\boxed{ク}}\vec{b}+\frac{\boxed{ケ}}{\boxed{コ}}\vec{c}$$

PART2　直線と平面の垂直

2 原点 O および 3 点 A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(0, 0, 2) がある。点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足を H とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。

Point Pickup

平面 ABC 上に点 H があるとき，次のことが成り立つ。

$$\mathrm{OH} \perp \text{平面 ABC} \iff \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}} \text{ かつ } \overrightarrow{\mathrm{OH}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

第14講　PART2　確認問題

1　原点Oおよび3点A(0, 4, 5), B(2, 3, 5), C(0, 5, 4) がある。点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。次の問いに答えよ。

(1)　点Hの座標を求めよ。

H(ア , イ , ウ)

(2)　四面体OABCの体積 V を求めよ。

$V=$ エ

PART3　ベクトル方程式

3 点 $(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2点 $(4,\ 2,\ 0)$，$(5,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする。また，点 $(2,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面を S とする。

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ。

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ。

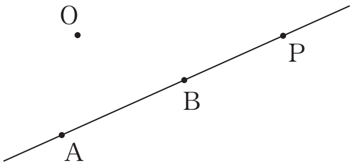
(3)　球面 S の方程式を求めよ。また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ。

Point Pickup

点 P が直線 AB 上の点

$\iff$　$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$\iff$　$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$



$\overrightarrow{AB}$ を，直線 AB の方向ベクトルという。

中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は

$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$

第 14 講　PART3　確認問題

点 $(3,\ 2,\ 3)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線を l，

2 点 $(1,\ 0,\ 3)$，$(1,\ 4,\ -5)$ を通る直線を m とする。

1 (1)　直線 l と zx 平面の交点の座標を求めよ。

$$(\boxed{ア},\ \boxed{イ},\ \boxed{ウ})$$

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ。

$$\sqrt{\boxed{エ}}$$

2 点 $(-1,\ 1,\ 2)$ を中心とする半径 3 の球面を S とする。球面 S の方程式を求めよ。また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ。

球面 S の方程式は

$$(x+\boxed{オ})^2+(y-\boxed{カ})^2+(z-\boxed{キ})^2=\boxed{ク}$$

直線 l のベクトル方程式は，t を実数とすると

$$(x,\ y,\ z)=(t+\boxed{ケ},\ \boxed{コ}t+\boxed{サ},\ t+\boxed{シ})$$

よって，球面 S と直線 l は $\boxed{ス}$

[$\boxed{ス}$ の選択肢]

①　共有点をもつ。　　②　共有点をもたない。

テキスト　解答

第 1 講　等差数列，等比数列

PART1　等差数列とその和

1　第 10 項が 230，第 25 項が −220 である等差数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とする。

(1)　一般項 a_n，和 S_n を求めよ。

(2)　S_n の最大値を求めよ。

(3)　$|S_n|$ の最小値を求めよ。

(1)　初項を a，公差を d とおくと，$a_n=a+(n-1)d$

$a_{10}=230$，$a_{25}=-220$ より

$$\begin{cases} a+9d=230 \\ a+24d=-220 \end{cases}$$

よって　$a=500$，$d=-30$

よって，一般項は $a_n=500+(n-1)\cdot(-30)=-30n+530$

$$S_n=\frac{n}{2}\{2\cdot 500+(n-1)\cdot(-30)\}=\frac{n}{2}(1030-30n)=5n(103-3n)$$

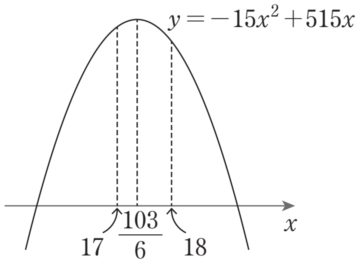
(2)　$a_n<0$ とすると $-30n+530<0$　　$n>\frac{53}{3}=17.6\cdots\cdots$

よって，$1\leqq n\leqq 17$ のとき $a_n>0$，$n\geqq 18$ のとき $a_n<0$ であるから，

S_n は $n=17$ のとき最大値 $S_{17}=5\cdot 17\cdot(103-3\cdot 17)=4420$ をとる。

（別解）

$$S_n=-15n^2+515n=-15\left(n-\frac{103}{6}\right)^2+15\cdot\left(\frac{103}{6}\right)^2$$



よって，$\frac{103}{6}=17.1\cdots\cdots$ に最も近い自然数 $n=17$

のとき，S_n は最大値

$$S_{17}=5\cdot 17\cdot(103-3\cdot 17)=4420$$

をとる。

(3)　$S_n=0$ とすると　$5n(103-3n)=0$

$$\frac{103}{3}=34.3\cdots\cdots$$

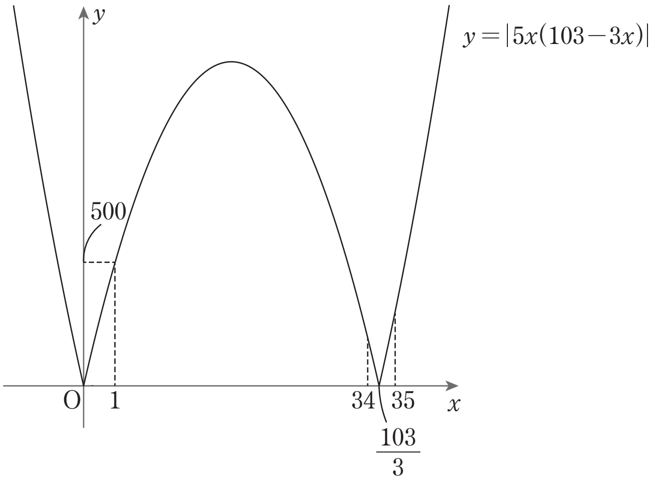
より，n は自然数であるから最小値の候補は $|S_1|$，$|S_{34}|$，$|S_{35}|$

$$|S_1|=|500|=500$$

$$|S_{34}|=|5\cdot34(103-3\cdot34)|=|170|=170$$

$$|S_{35}|=|5\cdot35(103-3\cdot35)|=|-350|=350$$

したがって，$n=34$ のとき，$|S_n|$ は最小値 170 をとる。



PART2　等比数列とその和

2　等比数列 $\{a_n\}$ において

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3,\ \frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\frac{1}{a_{10}}=2$$

のとき，積 $a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}$ の値を求めよ。

初項を a，公比を r とおくと，$a_n=ar^{n-1}$

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{10}}=2$ より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{ar^9}=2$$

$$r^9+r^8+r^7+\cdots\cdots+1=2ar^9$$

$$ar^9+ar^8+ar^7+\cdots\cdots+a=2a^2r^9$$

よって　$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=2a^2r^9$

$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{10}=3$ であるから　$3=2a^2r^9$　　$a^2r^9=\dfrac{3}{2}$

したがって

$$a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{10}=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\ \cdots\cdots\ \cdot ar^9$$

$$=a^{10}r^{1+2+\cdots\cdots+9}$$

$$=a^{10}r^{45}=(a^2r^9)^5$$

$$=\left(\frac{3}{2}\right)^5=\frac{243}{32}$$

PART3　等差数列と等比数列

3　実数係数の３次方程式 $x^3+ax^2+bx+8=0$ が３つの実数解 α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$ をもつとする。α，β，γ はある順で等差数列となり，また，ある順で等比数列となる。このとき，a，b，α，β，γ の値を求めよ。

解と係数の関係より

$\alpha+\beta+\gamma=-a$ …… ①　　$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b$ …… ②　　$\alpha\beta\gamma=-8$ …… ③

また，α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$が等差数列をなすとき

$\dfrac{\alpha+\gamma}{2}=\beta$　つまり　$\alpha+\gamma=2\beta$ …… ④

③より α，β，γ はすべて負，または２数が正で１数が負である。

α，β，γ がすべて負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より中央の項は β　　よって　$\beta^2=\alpha\gamma$

これと③より　$\beta^3=-8$　　β は実数であるから　$\beta=-2$

このとき，④より　$\alpha+\gamma=-4$　　③より　$\alpha\gamma=4$

したがって，α，γ は２次方程式 $t^2+4t+4=0$ の２つの解である。

$(t+2)^2=0$　より　$t=-2$　　よって　$\alpha=\gamma=-2$

これは $\alpha<\beta<\gamma$ を満たさず不適

α，β，γ のうち２数が正で１数が負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より，$\alpha<0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ である。

α，β，γ が等比数列をなすとき，公比は負であり，中央の項は α である。

よって　$\alpha^2=\beta\gamma$

これと③より　$\alpha^3=-8$　　α は実数であるから　$\alpha=-2$

このとき，④より　$-2+\gamma=2\beta$　　すなわち　$\gamma=2\beta+2=2(\beta+1)$

③より　$\beta\gamma=4$

よって　$2(\beta+1)\beta=4$　　$\beta^2+\beta-2=0$　　$(\beta-1)(\beta+2)=0$

$\beta>0$ より　$\beta=1$　　このとき $\gamma=4$ となり $\alpha<\beta<\gamma$ を満たす

①，②より　$a=-3$，$b=-6$

以上より　$a=-3$，$b=-6$，$\alpha=-2$，$\beta=1$，$\gamma=4$

第2講　和の記号Σ，階差数列

PART1　和の記号Σとその性質

1　[1]　恒等式 $(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$ が成り立つことを示せ。

[2]　次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ。

(1)　1，1+2，1+2+3，……

(2)　1，1+2，$1+2+2^2$，……

(3)　$1\cdot n$，$2\cdot(n-1)$，$3\cdot(n-2)$，……

[1]　$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

これらの式を辺々加えると

$$(n+1)^4-1=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\sum_{k=1}^{n}k^2+4\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+4\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n$$

$$4\sum_{k=1}^{n}k^3=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)-2n(n+1)-(n+1)$$

$$=(n+1)\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}$$

$$=n^2(n+1)^2$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

［2］　与えられた数列の第 k 項を a_k，求める和を S_n とする。

(1)　$a_k=1+2+3+\cdots\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k(k+1)=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(k^2+k\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2)　$a_k=1+2+2^2+\cdots\cdots+2^{k-1}=\dfrac{1\cdot\left(2^k-1\right)}{2-1}=2^k-1$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(2^k-1\right)=\frac{2\left(2^n-1\right)}{2-1}-n=2^{n+1}-n-2$$

(3)　$a_k=k(n-k+1)=-k^2+(n+1)k$

よって

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left\{-k^2+(n+1)k\right\}$$
$$=-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+(n+1)\cdot\frac{1}{2}n(n+1)$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)\{-(2n+1)+3(n+1)\}$$
$$=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

PART2　階差数列と一般項，和と一般項

2　［1］　次の数列の一般項を求めよ。

1，2，4，10，23，46，82，134，……

［2］　初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=n(n+1)$ で表される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　和 $a_1+a_3+a_5+\cdots\cdots+a_{2n-1}$ を求めよ。

［1］　与えられた数列を $\{a_n\}$，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。

$\{a_n\}$：1，2，4，10，23，46，82，134，……

$\{b_n\}$：　1，2，6，13，23，36，52，……

$\{c_n\}$：　　1，4，7，10，13，16，……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 1，公差 3 の等差数列であるから

$$c_n=1+(n-1)\cdot 3=3n-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(3k-2)=1+3\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)=\frac{1}{2}(3n^2-7n+6)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(3\cdot 1^2-7\cdot 1+6)=1$ であり，b_1 と一致する。

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n-1}(3k^2-7k+6)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left\{3\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-7\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(1^3-5\cdot 1^2+10\cdot 1-4)=1$ であり，a_1 と一致する。

よって，求める数列の一般項は

$$a_n=\frac{1}{2}(n^3-5n^2+10n-4)$$

［2］　(1)　$a_1=S_1=1\cdot 2=2$

$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=S_n-S_{n-1}=n(n+1)-(n-1)n=2n$$

この式で，$n=1$ のとき $2\cdot 1=2$ であり，a_1 と一致する。

したがって　$a_n=2n$

(2)　数列 a_1，a_3，a_5，…… の第 k 項は $a_{2k-1}=2(2k-1)$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} a_{2k-1}=2\sum_{k=1}^{n}(2k-1)=2\left\{2\cdot\frac{1}{2}n(n+1)-n\right\}=2n^2$$

PART3　さまざまな数列の和

3　[1]　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$ の和を求めよ。

[2]　次の数列の和を求めよ。

$$1+\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}$$

[1]　$\displaystyle\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$ であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{2\cdot3}\right)+\left(\frac{1}{2\cdot3}-\frac{1}{3\cdot4}\right)+\left(\frac{1}{3\cdot4}-\frac{1}{4\cdot5}\right)+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(n-1)n}-\frac{1}{n(n+1)}\right\}+\left\{\frac{1}{n(n+1)}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1\cdot2}-\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(n+1)(n+2)-2}{2(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

[2]　$\displaystyle S=1+\frac{4}{2}+\frac{7}{2^2}+\frac{10}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-2}{2^{n-1}}$　……①　とおくと

$\displaystyle\frac{1}{2}S=\quad\frac{1}{2}+\frac{4}{2^2}+\frac{7}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{3n-5}{2^{n-1}}+\frac{3n-2}{2^n}$　……②

①－②より

$$\frac{1}{2}S=1+3\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{3n-2}{2^n}$$

$$=1+3\cdot\frac{\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{3n-2}{2^n}=4-\frac{3}{2^{n-1}}-\frac{3n-2}{2^n}=4-\frac{3n+4}{2^n}$$

よって，求める和は

$$S=8-\frac{3n+4}{2^{n-1}}$$

第 3 講　群数列，漸化式

PART1　群数列として考える

1　数列 $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{1}{6}$, …… について，次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{7}{18}$ は第何項か。

(2)　第 200 項を求めよ。

(3)　初項から第 200 項までの和を求めよ。

与えられた数列を，分母が等しい分数を群として分けると

$$\frac{1}{2}\,\Big|\,\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\,\Big|\,\frac{1}{4},\ \frac{2}{4},\ \frac{3}{4}\,\Big|\,\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\,\Big|\,\frac{1}{6},\ \cdots\cdots$$

となり，第 n 群に n 個の項を含む。

第 n 群の初項は $\frac{1}{n+1}$，末項は $\frac{n}{n+1}$ である。

また，第 1 群から第 n 群までの項数は $1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$ である。

(1)　$\frac{7}{18}$ は第 17 群の 7 番目の項である。

第 16 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot16\cdot17=136$ であるから，$\frac{7}{18}$ は第 143 項である。

(2)　第 200 項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<200\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$(n-1)n<400\leqq n(n+1)$$

$19\cdot20=380$，$20\cdot21=420$ より，不等式を満たす自然数は　$n=20$

よって，第 200 項は第 20 群に属する。

第 19 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot19\cdot20=190$ であるから，求める項は第 20 群の 10 番目の項，

すなわち $\frac{10}{21}$ である。

(3)　第 n 群に含まれるすべての項の和は　$\dfrac{1}{2}n\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{n}{n+1}\right)=\dfrac{1}{2}n$

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{19}\frac{1}{2}k+\left(\frac{1}{21}+\frac{2}{21}+\cdots\cdots+\frac{10}{21}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot19\cdot20+\frac{10}{2}\left(\frac{1}{21}+\frac{10}{21}\right)=95+\frac{55}{21}=\frac{2050}{21}$$

PART2　漸化式

2　［1］　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=1,\ a_{n+1}-a_n=6$　　(2)　$a_1=2,\ \dfrac{a_{n+1}}{a_n}=-2$

(3)　$a_1=1,\ a_{n+1}=a_n+4^n+2n-3$　　(4)　$a_1=-2,\ 4a_{n+1}=5a_n+4$

［2］　次のように定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_1=2,\ a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$　　(2)　$a_1=1,\ na_{n+1}=2(n+1)a_n$

［1］　(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=a_n+6$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 6 の等差数列である。

よって　$a_n=1+(n-1)\cdot 6=6n-5$

(2)　$a_1=2$，$a_{n+1}=-2a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公比 -2 の等比数列である。

よって　$a_n=2\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)\cdot(-2)^{n-1}=-(-2)^n$

(3)　$a_{n+1}-a_n=4^n+2n-3$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の第 n 項は 4^n+2n-3

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(4^k+2k-3\right)$$

$$=1+\frac{4\left(4^{n-1}-1\right)}{4-1}+2\cdot\frac{1}{2}n(n-1)-3(n-1)=\frac{1}{3}\cdot 4^n+n^2-4n+\frac{8}{3}$$

$a_1=1$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\dfrac{1}{3}\cdot 4^n+n^2-4n+\dfrac{8}{3}$

(4)　$a_{n+1}=\dfrac{5}{4}a_n+1$ より　$a_{n+1}+4=\dfrac{5}{4}(a_n+4)$

よって，数列 $\{a_n+4\}$ は，初項 $a_1+4=2$，公比 $\dfrac{5}{4}$ の等比数列である。

したがって　$a_n+4=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}$ より　$a_n=2\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}-4$

［2］　(1)　$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{4a_n+3}$ …… ①において，$a_{n+1}=0$ であると仮定すると，$a_n=0$ である。

よって，$a_n=0$ となる n があると仮定すると

$$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$$

となり，$a_1=2$ であることに矛盾する。

よって，すべての自然数 n について $a_n\neq 0$ である。

①の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{4a_n+3}{a_n}=\frac{3}{a_n}+4$$

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと，$b_{n+1}=3b_n+4$，$b_1=\dfrac{1}{a_1}=\dfrac{1}{2}$

$$b_{n+1}+2=3(b_n+2),\quad b_1+2=\frac{5}{2}$$

よって，数列 $\{b_n+2\}$ は，初項 $\dfrac{5}{2}$，公比３の等比数列であるから

$$b_n+2=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}\qquad \text{よって}\quad b_n=\frac{5}{2}\cdot 3^{n-1}-2=\frac{5\cdot 3^{n-1}-4}{2}$$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{2}{5\cdot 3^{n-1}-4}$

(2)　$na_{n+1}=2(n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$\frac{a_{n+1}}{n+1}=2\cdot\frac{a_n}{n}$$

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=2b_n$，$b_1=\dfrac{a_1}{1}=1$

よって　$b_n=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ より　$\dfrac{a_n}{n}=2^{n-1}$　　したがって　$a_n=n\cdot 2^{n-1}$

（別解）

$na_{n+1}=2(n+1)a_n$ より　$a_{n+1}=2\cdot\dfrac{n+1}{n}a_n$

よって　$n\geqq 2$ のとき　$a_n=2\cdot\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$

　　　　$n\geqq 3$ のとき　$a_{n-1}=2\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

よって　$a_n=2^2\cdot\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

これを繰り返すと，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=2^{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}a_1=2^{n-1}\cdot\frac{n}{1}\cdot 1=n\cdot 2^{n-1}$$

これは $n=1$ のときも成り立つ。したがって　$a_n=n\cdot 2^{n-1}$

PART3　連立漸化式

3　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を $a_1=2$, $b_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=3a_n+2b_n$ で定める。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ を満たす α, β の値を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ の左辺に，$a_{n+1}=2a_n+3b_n$, $b_{n+1}=3a_n+2b_n$ を代入すると

$$2a_n+3b_n-\alpha(3a_n+2b_n)=\beta a_n-\alpha\beta b_n$$

すなわち　$(2-3\alpha)a_n+(3-2\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$

これがすべての自然数 n で成り立つための条件は

$$2-3\alpha=\beta,\ 3-2\alpha=-\alpha\beta$$

より

$$3-2\alpha=-\alpha(2-3\alpha)\qquad \alpha^2=1\qquad \text{よって}\quad \alpha=\pm1$$

したがって　$(\alpha,\ \beta)=(-1,\ 5),\ (1,\ -1)$

(2)　(1)の結果より

$$a_{n+1}+b_{n+1}=5(a_n+b_n),\ a_1+b_1=3$$

$$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n),\ a_1-b_1=1$$

よって，数列 $\{a_n+b_n\}$ は初項 3，公比 5 の等比数列であり，数列 $\{a_n-b_n\}$ は初項 1，公比 -1 の等比数列である。

したがって

$$a_n+b_n=3\cdot5^{n-1}\ \cdots\cdots\ ①\qquad a_n-b_n=(-1)^{n-1}\ \cdots\cdots\ ②$$

(①＋②)÷2 より　$a_n=\dfrac{3\cdot5^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2}$

(①－②)÷2 より　$b_n=\dfrac{3\cdot5^{n-1}-(-1)^{n-1}}{2}$

第 4 講　数学的帰納法

PART1　数学的帰納法による証明

1　(1)　すべての自然数 n について, 次の等式が成り立つことを数学的帰納法で証明せよ。

$$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$$

(2)　n が自然数のとき, 5^n-2^n が 3 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。

(1)　$(n+1)(n+2)(n+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2n=2^n\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2n-1)$ …… ① とする。

[1]　$n=1$ のとき　　(①の左辺)$=2$,（①の右辺)$=2\cdot 1=2$

よって，$n=1$ のとき　①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k=2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)$$

このとき

$$\{(k+1)+1\}\{(k+1)+2\}\{(k+1)+3\}\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)\{2(k+1)\}$$
$$=(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)\{2(k+1)\}$$
$$=2(k+1)(k+2)(k+3)\cdot\cdots\cdots\cdot 2k(2k+1)$$
$$=2\cdot 2^k\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot(2k+1)$$
$$=2^{k+1}\cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdots\cdot(2k-1)\cdot\{2(k+1)-1\}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

(2)　「5^n-2^n は 3 の倍数である」を①とする。

[1]　$n=1$ のとき　　$5^1-2^1=3$ より，①は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

5^k-2^k は 3 の倍数　すなわち　$5^k-2^k=3m$（m は整数)とおける。

このとき

$$5^{k+1}-2^{k+1}=5\cdot 5^k-2^{k+1}=5(3m+2^k)-2\cdot 2^k=5\cdot 3m+3\cdot 2^k=3(5m+2^k)$$

$5m+2^k$ は整数であるから，$5^{k+1}-2^{k+1}$ は 3 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

PART2　数学的帰納法による不等式の証明

2　［1］ n を 2 以上の自然数とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$$

［2］ n が自然数のとき，不等式 $n!\geqq 2^{n-1}$ が成り立つことを示せ。

［1］ $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$　すなわち　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{n^2}<2-\dfrac{1}{n}$ …… ① について

（Ⅰ） $n=2$ のとき　（①の左辺）$=\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}=\dfrac{5}{4}$，（①の右辺）$=2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$

よって，$n=2$ のとき，①は成り立つ。

（Ⅱ） $n=k$ $(k\geqq 2)$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{k}$$

このとき

$$\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{k^2}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$>\left(2-\frac{1}{k+1}\right)-\left\{2-\frac{1}{k}+\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}-\frac{1}{(k+1)^2}=\frac{(k+1)^2-k(k+1)-k}{k(k+1)^2}=\frac{1}{k(k+1)^2}>0$$

したがって　$\dfrac{1}{1^2}+\dfrac{1}{2^2}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{k^2}+\dfrac{1}{(k+1)^2}<2-\dfrac{1}{k+1}$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

（Ⅰ），（Ⅱ）より，2 以上のすべての自然数 n について，①すなわち $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}<2-\frac{1}{n}$ は成り立つ。

［2］ $n!\geqq 2^{n-1}$ …… ① とする。

（Ⅰ） $n=1$ のとき　（①の左辺）$=1!=1$，（①の右辺）$=2^0=1$ より，①は成り立つ。

（Ⅱ） $n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$k!\geqq 2^{k-1}$$

このとき

$$(k+1)!-2^{(k+1)-1}=(k+1)\cdot k!-2^k$$
$$\geqq (k+1)\cdot 2^{k-1}-2\cdot 2^{k-1}=(k-1)\cdot 2^{k-1}\geqq 0$$

したがって　$(k+1)!\geqq 2^{(k+1)-1}$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I)，(II)より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

PART3　漸化式と数学的帰納法

3　[1]　$a_1=-1$，$a_{n+1}=a_n{}^2+2na_n-2$ で定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4，a_5 を求めよ。

(2)　一般項 a_n を推測し，それを数学的帰納法で証明せよ。

[2]　$a_1=2$，$a_{n+1}=2-\dfrac{1}{a_n}$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。すべての自然数 n について $a_n>a_{n+1}>1$ が成り立つことを示せ。

[1]　(1)　$a_2=(-1)^2+2\cdot1\cdot(-1)-2=-3$　　$a_3=(-3)^2+2\cdot2\cdot(-3)-2=-5$

$a_4=(-5)^2+2\cdot3\cdot(-5)-2=-7$　　$a_5=(-7)^2+2\cdot4\cdot(-7)-2=-9$

(2)　(1)より，$a_n=-2n+1$ …… ① と推測される。

(I)　$n=1$ のとき　$a_1=-2\cdot1+1=-1$ より，①は成り立つ。

(II)　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると

$$a_k=-2k+1$$

このとき

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=a_k{}^2+2ka_k-2\\&=(-2k+1)^2+2k(-2k+1)-2=-2k-1=-2(k+1)+1\end{aligned}$$

よって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I)，(II)より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

[2]　$a_n>1$ …… ①とする。

(I)　$n=1$ のとき　$a_1=2>1$ より，①は成り立つ。

(II)　$n=k$ のとき，①が成り立つと仮定すると　$a_k>1$ より　$\dfrac{1}{a_k}<1$

このとき

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}>2-1=1$$

したがって，$n=k+1$ のときにも①は成り立つ。

(I)，(II)より，すべての自然数 n について，①は成り立つ。

よって　$a_{n+1}>1$

次に，$a_n > a_{n+1}$ を示す。

$a_n > 1$ より

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(2 - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{{a_n}^2 - 2a_n + 1}{a_n} = \frac{(a_n - 1)^2}{a_n} > 0$$

よって　$a_n > a_{n+1}$

したがって　$a_n > a_{n+1} > 1$ が成り立つ

第 5 講　確率分布

PART1　二項分布の期待値と分散

1　n を自然数とする。原点 O から出発して数直線上を n 回移動する点 A を考える。点 A は 1 回ごとに確率 p で正の向きに 3 だけ移動し，確率 $1-p$ で負の向きに 1 だけ移動する。ただし，$0<p<1$ とする。n 回の移動のうち正の向きの移動の回数を X，n 回移動した後の点 A の座標を Y とする。

(1)　$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の分布，期待値，分散を求めよ。

(2)　確率変数 X の期待値，分散を求めよ。

(3)　確率変数 Y の期待値，分散を求めよ。

(1)　$p=\frac{1}{3}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の値は

2 回負の向きに移動するとき　$(-1)+(-1)=-2$

1 回負，1 回正の向きに移動するとき　$(-1)+3=2$

2 回正の向きに移動するとき　$3+3=6$

$$P(Y=-2)=(1-p)^2=\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{4}{9}$$

$$P(Y=2)={}_2\mathrm{C}_1\,p(1-p)=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{4}{9}$$

$$P(Y=6)=p^2=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

Y の確率分布は下の表のようになる。

Y	-2	2	6	計
P	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{9}$	1

よって

Y の期待値　$E(Y)=(-2)\cdot\frac{4}{9}+2\cdot\frac{4}{9}+6\cdot\frac{1}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

Y の分散　$V(Y)=\left\{(-2)^2\cdot\frac{4}{9}+2^2\cdot\frac{4}{9}+6^2\cdot\frac{1}{9}\right\}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{68}{9}-\frac{4}{9}=\frac{64}{9}$

(2) 確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うので

期待値 $E(X)=np$

分散 $V(X)=np(1-p)$

(3) n 回の移動で，点 A は正の向きに $3X$，負の向きに $-(n-X)=X-n$ 移動する。

よって $Y=3X+(X-n)=4X-n$

したがって

期待値 $E(Y)=E(4X-n)=4E(X)-n=4np-n$

分散 $V(Y)=V(4X-n)=4^2V(X)=16np(1-p)$

PART2　連続型確率変数の期待値と標準偏差

2　a を正の実数とする。連続型確率変数 X のとりうる値 x の範囲が $-a \leqq x \leqq 2a$ で，確率密度関数が

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{3a^2}(x+a) & (-a \leqq x \leqq 0)\\[2mm] \dfrac{1}{3a^2}(2a-x) & (0 \leqq x \leqq 2a)\end{cases}$$

であるとする。

(1)　$a \leqq X \leqq \dfrac{3}{2}a$ となる確率を求めよ。

(2)　X の期待値，標準偏差を求めよ。

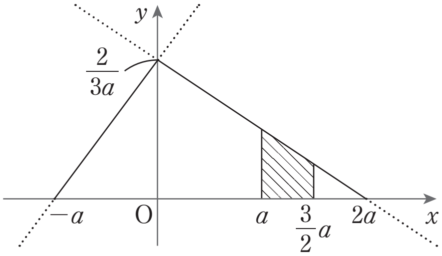
(3)　$Y=3X+7$ とするとき，Y の期待値，標準偏差を求めよ。

(1)　$$P\left(a \leqq X \leqq \frac{3}{2}a\right)=\int_a^{\frac{3}{2}a}\frac{1}{3a^2}(2a-x)dx$$

$$=\frac{1}{3a^2}\left[2ax-\frac{1}{2}x^2\right]_a^{\frac{3}{2}a}$$

$$=\frac{1}{3a^2}\left\{\left(3a^2-\frac{9}{8}a^2\right)-\left(2a^2-\frac{1}{2}a^2\right)\right\}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{8}$$



(2)　X の期待値は

$$E(X)=\int_{-a}^{2a}xf(x)dx$$

$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}x(x+a)dx+\int_0^{2a}\frac{1}{3a^2}x(2a-x)dx$$

$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}(x^2+ax)dx+\int_0^{2a}\frac{1}{3a^2}(2ax-x^2)dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\left[\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}ax^2\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{3a^2}\left[ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_0^{2a}$$

$$=\frac{2}{3a^2}\left(-\frac{1}{6}a^3\right)+\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{4}{3}a^3=-\frac{1}{9}a+\frac{4}{9}a=\frac{a}{3}$$

$$E(X^2)=\int_{-a}^{2a}x^2f(x)dx$$

$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}x^2(x+a)dx+\int_{0}^{2a}\frac{1}{3a^2}x^2(2a-x)dx$$

$$=\int_{-a}^{0}\frac{2}{3a^2}(x^3+ax^2)dx+\int_{0}^{2a}\frac{1}{3a^2}(2ax^2-x^3)dx$$

$$=\frac{2}{3a^2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{3}ax^3\right]_{-a}^{0}+\frac{1}{3a^2}\left[\frac{2a}{3}x^3-\frac{1}{4}x^4\right]_{0}^{2a}$$

$$=\frac{2}{3a^2}\cdot\frac{1}{12}a^4+\frac{1}{3a^2}\cdot\frac{4}{3}a^4=\frac{1}{18}a^2+\frac{4}{9}a^2=\frac{a^2}{2}$$

$$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2=\frac{a^2}{2}-\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{7}{18}a^2$$

よって X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{7}{18}a^2}=\frac{\sqrt{14}}{6}a$$

(3)　Y の期待値は

$$E(Y)=E(3X+7)=3E(X)+7=3\cdot\frac{a}{3}+7=a+7$$

Y の標準偏差は

$$\sigma(Y)=\sigma(3X+7)=|3|\sigma(X)=3\cdot\frac{\sqrt{14}}{6}a=\frac{\sqrt{14}}{2}a$$

PART3　二項分布の正規分布による近似

3　a を 3 以上の整数とする。2，4，6，……，$2a$ の数字がそれぞれ一つずつ書かれた a 枚のカードが箱に入っている。この箱から 3 枚のカードを同時に取り出し，それらのカードを横 1 列に並べる試行を T とする。試行 T において，カードの数字が左から小さい順に並んでいる事象を A とする。

試行 T を 180 回繰り返すとき，事象 A が起こる回数が 18 回以上 36 回以下である確率を，小数第 3 位を四捨五入して小数第 2 位まで求めよ。

a 枚のカードから 3 枚取り出して並べる場合の数は ${}_aP_3$ 通り

a 枚のカードから 3 枚取り出して並べたとき，数字が左から小さい順に並んでいるのは，取り出した 3 枚のカードの順列のうち 1 通りのみ。よって，${}_aC_3$ 通り。

したがって，事象 A の起こる確率 p は

$$p=\frac{{}_aC_3}{{}_aP_3}=\frac{{}_aC_3}{{}_aC_3\times 3!}=\frac{1}{6}$$

試行 T を 180 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を X とすると，X は二項分布 $B\left(180,\ \frac{1}{6}\right)$ に従う。よって，確率変数 X の

期待値　$m=180\cdot\frac{1}{6}=30$

標準偏差 $\sigma=\sqrt{180\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}}=\sqrt{25}=5$

試行回数 180 回は十分に大きいから，X は近似的に正規分布 $N(30,\ 25)$ に従うとみなしてよい。

ここで $Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-30}{5}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$\begin{aligned}P(18\leqq X\leqq 36)&=P(-2.4\leqq Z\leqq 1.2)\\&=P(0\leqq Z\leqq 2.4)+P(0\leqq Z\leqq 1.2)\\&=0.4918+0.3849\\&=0.8767\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　0.88

第 6 講　統計的な推測

PART1　母平均の推定

1 ある市立図書館における高校生の利用状況について調査を行った。
この図書館に利用者登録のある高校生全員を母集団とする。1 回あたりの利用時間(分)を表す確率変数を W とし, W は母平均 m, 母標準偏差 30 の分布に従うとする。
この母集団から大きさ n の標本 W_1, W_2, ……, W_n を無作為に抽出する。
利用時間が 60 分をどの程度超えるかについて調査するために

$$U_1 = W_1 - 60,\ U_2 = W_2 - 60,\ \cdots\cdots,\ U_n = W_n - 60$$

とおく。

(1) U_1 の平均 $E(U_1)$, 標準偏差 $\sigma(U_1)$ を求めよ。

(2) この母集団から無作為に抽出された 100 人の生徒に対して, U_1, U_2, ……, U_{100} の値を調べたところ, その標本平均の値が 50 分であった。$t = m - 60$ として, t に対する信頼度 95% の信頼区間を求めよ。

(1) W_1 は, 母集団から無作為に 1 人の生徒を選んだとき, その生徒の 1 回あたりの利用時間(分)である。1 回あたりの利用時間を表す確率変数 W は, 母平均 m, 母標準偏差 30 の分布に従うから, 確率変数 $U_1 = W_1 - 60$ の平均と標準偏差は

平均　$E(U_1) = E(W_1 - 60) = E(W_1) - 60 = m - 60$

標準偏差　$\sigma(U_1) = \sigma(W_1 - 60) = \sigma(W_1) = 30$

(2) この母集団から無作為に抽出された 100 人の生徒の利用時間 U_1, U_2, ……, U_{100} の標本平均を $\overline{U}$ とする。

標本の大きさは十分大きいから, $\overline{U}$ は近似的に正規分布 $N\left(m - 60,\ \dfrac{30^2}{100}\right)$ に従う。

よって, $m - 60$, すなわち t に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{U} - 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}} \leqq t \leqq \overline{U} + 1.96 \cdot \frac{30}{\sqrt{100}}$$

$\overline{U} = 50$ とすると

$$50 - 1.96 \cdot 3 \leqq t \leqq 50 + 1.96 \cdot 3$$

$$50 - 5.88 \leqq t \leqq 50 + 5.88$$

よって　$44.12 \leqq t \leqq 55.88$

PART2　母比率の推定

2　ある市の全家庭から 3600 家庭を無作為抽出し，新規導入予定のゴミ分別制度への賛否を調査したところ，2304 家庭が賛成と回答した。

(1)　この市の全家庭における賛成の母比率 p を信頼度 95% で推定せよ。結果は小数第４位を四捨五入して小数第３位まで求めよ。

(2)　この市の全家庭における賛成の母比率 p を信頼度 99% で推定せよ。結果は小数第４位を四捨五入して小数第３位まで求めよ。

(3)　母比率 p に対する信頼度 r% の信頼区間を $A \leqq p \leqq B$ とするとき，この信頼区間の幅を $B-A$ と定める。母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間の幅を，信頼度を変えずに(1)における信頼区間と比べて半分にしたい。標本の大きさを何倍にすればよいか。

(1)　標本の大きさは $n=3600$，標本比率は $R=\dfrac{2304}{3600}=0.64$

$$1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\cdot\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{3600}}=1.96\cdot0.008=0.01568$$

よって，信頼度 95% の信頼区間は

$$0.64-0.01568 \leqq p \leqq 0.64+0.01568 \quad より \quad 0.62432 \leqq p \leqq 0.65568$$

小数第４位を四捨五入して　$0.624 \leqq p \leqq 0.656$

(2)　(1)より，$n=3600$，$R=0.64$ であるから

$$2.58\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=2.58\cdot\sqrt{\frac{0.64\times0.36}{3600}}=2.58\cdot0.008=0.02064$$

よって，信頼度 99% の信頼区間は

$$0.64-0.02064 \leqq p \leqq 0.64+0.02064 \quad より \quad 0.61936 \leqq p \leqq 0.66064$$

小数第４位を四捨五入して　$0.619 \leqq p \leqq 0.661$

(3)　母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間の幅は

$$\left(R+1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)-\left(R-1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)=2\cdot1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

であるから，$n=3600$ のときの信頼区間の幅の半分になる標本の大きさを Nとすると

$$2\cdot1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{N}}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{3600}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{2\sqrt{3600}} \qquad N=4\cdot 3600$$

よって，標本の大きさを４倍にすればよい。

PART3　仮説検定

3 ある食品工場で製造されている袋入り小麦粉の重量の表示重量は 500 g であり，これを母平均とする。この工場で製造工程を変更した際に，重量の母平均が変化したかを調査することとした。変更後に製造された袋入り小麦粉から無作為に 16 袋を抽出したところ，重量の標本平均が 505 g，標本標準偏差が 10 g であった。母集団分布が正規分布に従うとき，変更後の重量の母平均は変化したと判断してよいか。有意水準 5% で検定せよ。

対立仮説 H_1 は「重量の母平均は変化した」

帰無仮説 H_0 は「重量の母平均は変化しない」

H_0 が正しいとするとき，母集団分布が正規分布に従うので，標本の大きさに関係なく，標本平均 $\overline{X}$ の分布も近似的に正規分布 $N\left(500,\ \dfrac{10^2}{16}\right)$，すなわち $N(500,\ 2.5^2)$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-500}{2.5}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より $P(-1.96 \leqq Z \leqq 1.96) \fallingdotseq 0.95$ であるから，有意水準 5% の棄却域は

$$Z \leqq -1.96,\ 1.96 \leqq Z$$

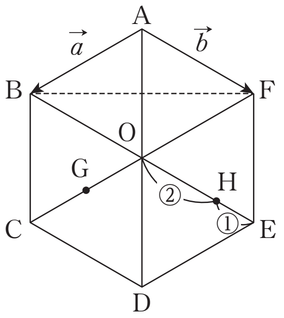
$\overline{X}=505$ のとき，$Z=\dfrac{505-500}{2.5}=2$ であり，この値は棄却域に入るから，H_0 は棄却できる。

よって，重量の母平均は変化したと判断してよい。

第７講　平面上のベクトル，ベクトルの成分表示

PART1　ベクトルの分解

1 正六角形 ABCDEF において，その中心を O，線分 OC の中点を G，線分 OE を 2：1 に内分する点を H とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{BF}$，$\overrightarrow{DF}$，$\overrightarrow{BG}$，$\overrightarrow{GH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



$\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AO}=2(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO})=2(\vec{a}+\vec{b})=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AF}=-\vec{a}+\vec{b}$

（別解）

$\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AB}=\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{DE}+\overrightarrow{EF}=-\vec{a}-(\vec{a}+\vec{b})=-2\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OG}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$

PART2　ベクトルの成分と平行，座標と成分表示

2　［1］　(1)　$|\vec{a}|=2$ である $\vec{a}$ と平行な単位ベクトルを $\vec{a}$ を用いて表せ。

(2)　$\vec{a}=(x,\ -1)$，$\vec{b}=(2,\ -3)$ において，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行であるとき，実数 x の値を求めよ。また，このとき $|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。

［2］　4 点 A(1, 2)，B(3, 5)，C(4, 8)，D$(x,\ y)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　四角形 ABCD が平行四辺形になるように x，y の値を定めよ。

(2)　4 点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるように x，y の値を定めよ。

［1］　(1)　$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{a}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$

$\vec{a}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=-\dfrac{1}{2}\vec{a}$

(2)　$\vec{a}+3\vec{b}=(x+6,\ -10)$　　　$\vec{a}-\vec{b}=(x-2,\ 2)$

$\vec{a}+3\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}-\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$\vec{a}+3\vec{b}$ と $\vec{a}-\vec{b}$ が平行となるのは，

$\vec{a}+3\vec{b}=k(\vec{a}-\vec{b})$ となる実数 k が存在するときである。

$(x+6,\ -10)=k(x-2,\ 2)$　より

$$x+6=k(x-2)\ \cdots\cdots\ ①,\quad -10=2k\ \cdots\cdots\ ②$$

②より　$k=-5$

このとき①より　$x+6=-5(x-2)$

よって　$x=\dfrac{2}{3}$

$k=-5$　より　$\vec{a}+3\vec{b}=-5(\vec{a}-\vec{b})$

よって　$|\vec{a}+3\vec{b}|:|\vec{a}-\vec{b}|=5:1$

(x を求める別解)

$(\vec{a}+3\vec{b})\,/\!/\,(\vec{a}-\vec{b})$ より　$(x+6)\cdot 2-(-10)\cdot(x-2)=0$　　　よって $x=\dfrac{2}{3}$

［2］ (1) 四角形 ABCD が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

つまり $(2,\ 3)=(4-x,\ 8-y)$　　$4-x=2,\ 8-y=3$

よって　$x=2,\ y=5$

(2) 四角形 ABDC が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$$

つまり $(2,\ 3)=(x-4,\ y-8)$　　$x-4=2,\ y-8=3$

よって　$x=6,\ y=11$

四角形 ADBC が平行四辺形になるとき

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$$

つまり $(x-1,\ y-2)=(-1,\ -3)$　　$x-1=-1,\ y-2=-3$

よって　$x=0,\ y=-1$

これらと(1)の結果より，4 点 A，B，C，D が平行四辺形の頂点となるときの x，y の値は

$$(x,\ y)=(2,\ 5),\ (6,\ 11),\ (0,\ -1)$$

PART3　ベクトルの成分と大きさ，分解

3　$\vec{a}=(1,\ -1)$，$\vec{b}=(3,\ 2)$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}$ とおく。$\vec{p}$ の大きさが $\sqrt{2}$ となるような k の値を求めよ。また，$\vec{p}$ の大きさの最小値を求めよ。

(2)　$\vec{c}=(5,\ 4)$ を，$s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で表せ。

(1)　$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(1,\ -1)+k(3,\ 2)=(3k+1,\ 2k-1)$

$|\vec{p}|^2=(3k+1)^2+(2k-1)^2=13k^2+2k+2$

$|\vec{p}|=\sqrt{2}$ のとき　$|\vec{p}|^2=2$

よって　$13k^2+2k+2=2$　　$13k^2+2k=0$　　$k(13k+2)=0$

したがって　$k=0,\ -\dfrac{2}{13}$

また，$|\vec{p}|^2=13\left(k+\dfrac{1}{13}\right)^2+\dfrac{25}{13}$　であるから

$k=-\dfrac{1}{13}$ のとき $|\vec{p}|^2$ は最小値 $\dfrac{25}{13}$ をとる。

$|\vec{p}|\geqq 0$ より，このとき $|\vec{p}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{p}|$ は $k=-\dfrac{1}{13}$ のとき，最小値 $\sqrt{\dfrac{25}{13}}=\dfrac{5\sqrt{13}}{13}$ をとる。

(2)　$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より　$(5,\ 4)=s(1,\ -1)+t(3,\ 2)$

つまり　$(5,\ 4)=(s+3t,\ -s+2t)$

よって　$s+3t=5$，$-s+2t=4$ より　$s=-\dfrac{2}{5}$，$t=\dfrac{9}{5}$

したがって　$\vec{c}=-\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{9}{5}\vec{b}$

第 8 講　ベクトルの内積

PART1　ベクトルの内積

1　1辺の長さが2である正方形ABCDにおいて，次の内積を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$　(3)　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}$　(4)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}$

(1)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos 45^\circ$

$$=2\times2\sqrt{2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=4$$

(2)　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{BC}|\cos 90^\circ$

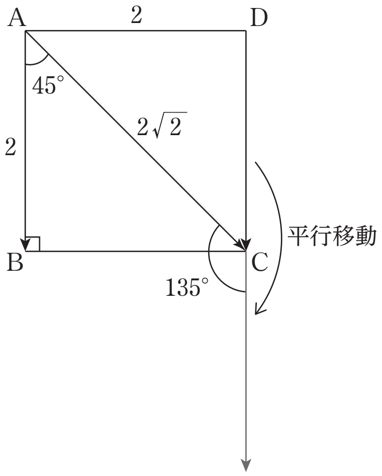
$$=2\times2\times0=0$$

(3)　$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{DA}=|\overrightarrow{CB}||\overrightarrow{DA}|\cos 0^\circ$

$$=2\times2\times1=4$$

(4)　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{DC}=|\overrightarrow{CA}||\overrightarrow{DC}|\cos 135^\circ$

$$=2\sqrt{2}\times2\times\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=-4$$



PART2　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

2　(1)　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$ と $\vec{b}=(2,\ k)$ のなす角が 45° であるとき，k の値を求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+k^2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+2\times k=2+2k$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ\quad\text{すなわち}\quad 2+2k=\sqrt{5}\sqrt{4+k^2}\times\frac{1}{\sqrt{2}}\ \cdots\cdots ①$$

①は(右辺)>0 であるから(左辺)>0　よって　$2+2k>0$ より $k>-1$

このとき①の両辺を2乗して

$$(2+2k)^2=5(4+k^2)\times\frac{1}{2}$$

$$3k^2+16k-12=0\qquad(3k-2)(k+6)=0\qquad k=\frac{2}{3},\ -6$$

$k>-1$　より　$k=\dfrac{2}{3}$

(2)　求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{n}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　すなわち　$x-2y=0\ \cdots\cdots ①$

また，$|\vec{n}|=1$ より $\sqrt{x^2+y^2}=1$　すなわち　$x^2+y^2=1\ \cdots\cdots ②$

①より　$x=2y$　　これを②に代入して

$$4y^2+y^2=1\qquad y^2=\frac{1}{5}\quad\text{よって}\quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

したがって，求めるベクトルは

$$\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

PART3　ベクトルの大きさと内積

3 ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ について，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$，$|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角 θ を求めよ。

(2) $\vec{a}-\vec{b}$ の大きさを求めよ。

(3) $\vec{a}+t\vec{b}$ の大きさが最小になるような実数 t の値を求め，その最小値を求めよ。

(1) $|\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{13}$ より

$$|\vec{a}+\vec{b}|^2=13 \qquad |\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=13$$

$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=1$ より　$3^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+1^2=13$

よって　$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{3}{2}$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{\frac{3}{2}}{3\times1}=\frac{1}{2} \qquad 0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ \text{ より } \theta=60^\circ$$

(2) $|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=3^2-2\times\dfrac{3}{2}+1^2=7$

$|\vec{a}-\vec{b}|\geqq0$ より　$|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$

(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2=t^2+3t+9=\left(t+\dfrac{3}{2}\right)^2+\dfrac{27}{4}$

よって，$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ より，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は

$t=-\dfrac{3}{2}$ のとき　最小値 $\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。

第 9 講　位置ベクトル

PART1　位置ベクトル

1　3 点 $A(\vec{a})$, $B(\vec{b})$, $C(\vec{c})$ を頂点とする △ABC において，辺 BC を 2：3 に内分する点を D，辺 BC を 1：2 に外分する点を E，△ABC の重心を G，△AED の重心を G′ とする。

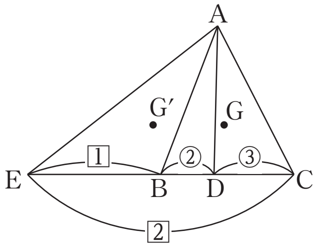
次の問いに答えよ。

(1)　点 G，点 G′ の位置ベクトルを，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{GG'}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ であることを証明せよ。

$D(\vec{d})$，$E(\vec{e})$，$G(\vec{g})$，$G'(\vec{g'})$ とする。



(1)　$\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}$

$$\vec{g'}=\frac{\vec{a}+\vec{e}+\vec{d}}{3}=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{2\vec{b}-\vec{c}}{-1+2}+\frac{3\vec{b}+2\vec{c}}{2+3}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(\vec{a}+\frac{13}{5}\vec{b}-\frac{3}{5}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{13}{15}\vec{b}-\frac{1}{5}\vec{c}$$

(2)　$\overrightarrow{GG'}=\vec{g'}-\vec{g}=\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{13}{15}\vec{b}-\dfrac{1}{5}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$$=\frac{8}{15}\vec{b}-\frac{8}{15}\vec{c}$$

(3)　$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=(\vec{a}-\vec{g})+(\vec{b}-\vec{g})+(\vec{c}-\vec{g})$

$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-3\vec{g}$$

$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{0}$$

よって示された。

PART2　分点を表す位置ベクトル

2　△ABC と，三角形の内部の点 P に関して，等式 $4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ が成り立つ。

(1)　点 P はどのような位置にあるか。

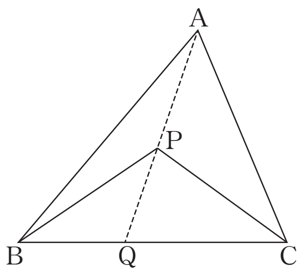
(2)　△PBC，△PCA，△PAB の面積の比を求めよ。

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{PA}}+3\overrightarrow{\mathrm{PB}}+2\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より

$$-4\overrightarrow{\mathrm{AP}}+3(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$$9\overrightarrow{\mathrm{AP}}=3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{9}=\dfrac{5}{9}\cdot\dfrac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{5}$



辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$

したがって，辺 BC を 2：3 に内分する点を Q とすると，点 P は線分 AQ を 5：4 に内分する点である。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=S$ とすると

BQ：QC＝2：3，AP：PQ＝5：4 であるから

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{4}{9}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{4}{9}S$$

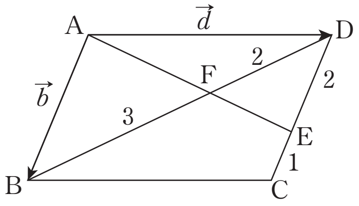
$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{5}{9}\triangle\mathrm{ACQ}=\frac{5}{9}\cdot\frac{3}{5}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{9}S$$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{5}{9}\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{5}{9}\cdot\frac{2}{5}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2}{9}S$$

したがって，$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{4}{9}S:\dfrac{3}{9}S:\dfrac{2}{9}S=4:3:2$

PART3　共線条件

3　平行四辺形 ABCD において，辺 CD を 1：2 に内分する点を E，対角線 BD を 3：2 に内分する点を F とする。このとき，3 点 A，F，E は一直線上にあることを証明せよ。



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。

BF：FD＝3：2 より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AD}}{3+2}=\frac{2\vec{b}+3\vec{d}}{5}=\frac{1}{5}(2\vec{b}+3\vec{d})$$

CE：ED＝1：2 より

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\vec{d}+\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(2\vec{b}+3\vec{d})$$

よって，$\overrightarrow{AF}=\frac{3}{5}\overrightarrow{AE}$ より，3 点 A，F，E は一直線上にある。

第10講　ベクトルと平面図形

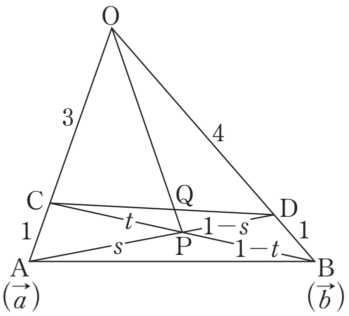
PART1　交点の位置ベクトル

1　[1]　△OAB の辺 OA を 3：1 に内分する点を C，辺 OB を 4：1 に内分する点を D とし，BC と AD の交点を P，CD と OP の交点を Q とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とおくとき，$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

[2]　△ABC の辺 AB を 2：1 に内分する点を D，辺 BC の中点を M とし，AM と CD の交点を E とする。$\overrightarrow{AE}$ を $\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ を用いて表せ。

[1]　AP：PD$=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-s)\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{OD}=(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}\ \cdots\cdots①$$



CP：PB$=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\overrightarrow{OC}+t\overrightarrow{OB}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots②$$

①，②より　$(1-s)\vec{a}+\frac{4}{5}s\vec{b}=\frac{3}{4}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから　$1-s=\frac{3}{4}(1-t)$，$\frac{4}{5}s=t$　　よって　$s=\frac{5}{8}$，$t=\frac{1}{2}$

したがって　$\overrightarrow{OP}=\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{OQ}=k\overrightarrow{OP}$ (k は実数)とおくと，$\vec{a}=\frac{4}{3}\overrightarrow{OC}$，$\vec{b}=\frac{5}{4}\overrightarrow{OD}$ より

$$\overrightarrow{OQ}=k\left(\frac{3}{8}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)=\frac{3}{8}k\vec{a}+\frac{1}{2}k\vec{b}=\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}\ \cdots\cdots③$$

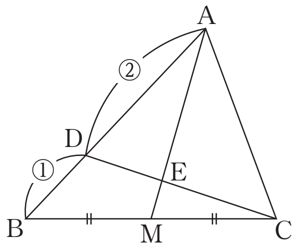
CQ：QD$=u:(1-u)$ とおくと　$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}\ \cdots\cdots④$

③，④より　$\frac{1}{2}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{8}k\overrightarrow{OD}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$

$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ は 1 次独立より　$\frac{1}{2}k=1-u$，$\frac{5}{8}k=u$　　よって　$k=\frac{8}{9}$，$u=\frac{5}{9}$

したがって　$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{4}{9}\vec{b}$

[2]　$\overrightarrow{AE}=k\overrightarrow{AM}$（$k$ は実数）とおくと，$\overrightarrow{AB}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AD}$ より



$$\overrightarrow{AE}=k\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{2}k\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{3}{4}k\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{AC}$$

点 E は線分 CD 上の点であるから　$\frac{3}{4}k+\frac{1}{2}k=1$　　　$k=\frac{4}{5}$

したがって　$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

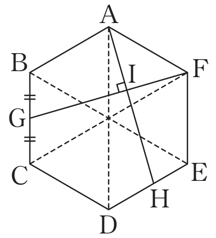
PART2　正多角形

2　1辺の長さが1の正六角形 ABCDEF において，辺 BC の中点を G とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AF}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}$，$\overrightarrow{FG}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　点 H を辺 DE 上の点とする。$\overrightarrow{AH}$ と $\overrightarrow{FG}$ が垂直であるとき，$\overrightarrow{AH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。また，線分 DH の長さを求めよ。

(3)　(2)のとき AH と FG の交点を I とする。$\overrightarrow{AI}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。



(1)　$\overrightarrow{AD}=2\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{FG}=\overrightarrow{AG}-\overrightarrow{AF}=\vec{a}+\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}=\dfrac{3}{2}\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos120^\circ=1\times1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=-\dfrac{1}{2}$

DH $=x$ とおくと，BA：DH$=1:x$ であるから　$\overrightarrow{DH}=x\overrightarrow{BA}=-x\vec{a}$

よって　$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=2\vec{a}+2\vec{b}-x\vec{a}=(2-x)\vec{a}+2\vec{b}$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{FG}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{FG}=0$

$$\{(2-x)\vec{a}+2\vec{b}\}\cdot\left(\frac{3}{2}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}\right)=0$$

すなわち　$\{(2-x)\vec{a}+2\vec{b}\}\cdot(3\vec{a}-\vec{b})=0$

$$(6-3x)|\vec{a}|^2+(x+4)\vec{a}\cdot\vec{b}-2|\vec{b}|^2=0$$

$$6-3x+(x+4)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)-2=0\qquad x=\frac{4}{7}$$

よって　$\overrightarrow{AH}=\dfrac{10}{7}\vec{a}+2\vec{b}$，DH $=\dfrac{4}{7}$

(3)　$\overrightarrow{AI}=k\overrightarrow{AH}$ (k は実数) とおくと

$$\overrightarrow{AI}=k\left(\frac{10}{7}\vec{a}+2\vec{b}\right)=\frac{10}{7}k\vec{a}+2k\vec{b}\ \cdots\cdots\ ①$$

また，GI：IF$=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{AI}=(1-s)\overrightarrow{AG}+s\overrightarrow{AF}=(1-s)\left(\frac{3}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)+s\vec{b}=\frac{3-3s}{2}\vec{a}+\frac{1+s}{2}\vec{b}\ \cdots\cdots\ ②$$

①，②より　$\frac{10}{7}k\vec{a}+2k\vec{b}=\frac{3-3s}{2}\vec{a}+\frac{1+s}{2}\vec{b}$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立であるから

$$\frac{10}{7}k=\frac{3-3s}{2},\ \ 2k=\frac{1+s}{2}$$

$$s=\frac{8}{13},\ \ k=\frac{21}{52}$$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\frac{15}{26}\vec{a}+\frac{21}{26}\vec{b}$

PART3　三角形の面積

3 (1) △OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，△OAB の面積を S とする。

(i) S を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(ii) (i)の結果を利用し，S を a_1，a_2，b_1，b_2 を用いて表せ。

(2) A(1，−1)，B(2，1)，C(4，3) を頂点とする三角形 ABC の面積を求めよ。

(1) (i) $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0°<\theta<180°)$ とすると　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right)^2}=\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2}}=\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\times\mathrm{OB}\sin\theta=\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\times\frac{\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}$$

(ii) $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$$|\vec{a}|^2=a_1{}^2+a_2{}^2,\quad |\vec{b}|^2=b_1{}^2+b_2{}^2,\quad (\vec{a}\cdot\vec{b})^2=(a_1b_1+a_2b_2)^2$$

よって，(i)の結果から

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1{}^2+a_2{}^2)(b_1{}^2+b_2{}^2)-(a_1b_1+a_2b_2)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{a_1{}^2b_2{}^2-2a_1b_1a_2b_2+a_2{}^2b_1{}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a_1b_2-a_2b_1)^2}=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(3,\ 4)$　より

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\quad |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3^2+4^2}=5,\quad \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\times3+2\times4=11$$

よって　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{5})^2\times5^2-11^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{125-121}=1$

(別解)

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|1\times4-2\times3|=1$$

第11講　ベクトル方程式

PART1　直線のベクトル方程式

1　(1)　点 $A(-2,\ 1)$ を通り，直線 $l:3x-5y+4=0$ に平行な直線を g，垂直な直線を h とする。g と h の方程式をそれぞれ求めよ。

(2)　法線ベクトルを利用し，2直線 $3x+y+6=0$ と $x+2y-5=0$ のなす鋭角を求めよ。

(1)　$\vec{n}=(3,\ -5)$ は，直線 $l:3x-5y+4=0$ の法線ベクトルの1つである。

直線 l と g は平行であるから，g は $\vec{n}$ を法線ベクトルにもつ。ゆえに，直線 g 上の点を $P(x,\ y)$ とすると

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AP}=0$$

よって，$3(x+2)-5(y-1)=0$ より，直線 g の方程式は $3x-5y+11=0$

直線 l と h は垂直であるから，h は $\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ。

ここで，$\vec{m}=(5,\ 3)$ について，$\vec{m}\cdot\vec{n}=5\times3+3\times(-5)=0$ より，$\vec{m}\perp\vec{n}$ であるから $\vec{m}$ は，直線 h の法線ベクトルの1つである。ゆえに，直線 h 上の点を $Q(x,\ y)$ とすると

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{AQ}=0$$

よって　$5(x+2)+3(y-1)=0$ より，直線 h の方程式は $5x+3y+7=0$

(2)　$\vec{n}=(3,\ 1)$ は直線 $3x+y+6=0$ の法線ベクトルの1つである。

また，$\vec{m}=(1,\ 2)$ は直線 $x+2y-5=0$ の法線ベクトルの1つである。

$\vec{n}$，$\vec{m}$ のなす角を θ $(0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とすると

$$|\vec{n}|=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10},\ |\vec{m}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5},\ \vec{n}\cdot\vec{m}=3\times1+1\times2=5$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{n}\cdot\vec{m}}{|\vec{n}||\vec{m}|}=\frac{5}{\sqrt{10}\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\text{よって}\qquad\theta=45^\circ$$

したがって，2直線のなす鋭角は 45°

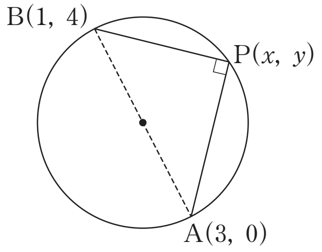
PART2　円のベクトル方程式

2　(1)　2点 A(3, 0), B(1, 4) を直径の両端とする円の方程式をベクトルを利用して求めよ。

(2)　△OAB において，$|\overrightarrow{OA}|=3$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=4$ とする。点 A で直線 OA に接する円の中心 C が ∠AOB の二等分線 g 上にある。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくとき，$\vec{c}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(1)　求める円上の点を P$(x,\ y)$ とすると

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=0\quad すなわち\quad \overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=0$$



$\overrightarrow{AP}=(x-3,\ y)$，$\overrightarrow{BP}=(x-1,\ y-4)$ より

$$(x-3)(x-1)+y(y-4)=0$$

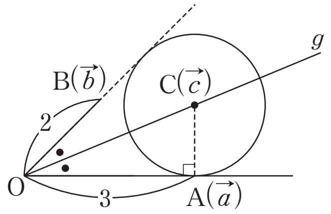
$$x^2-4x+y^2-4y+3=0$$

よって　$(x-2)^2+(y-2)^2=5$

(2)　点 C は ∠AOB の二等分線 g 上にあるので

$$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{2}\right)=\frac{k}{6}(2\vec{a}+3\vec{b})\ (k\text{ は実数})$$

とおける。ここで $\frac{k}{6}=t$ とおくと



$$\vec{c}=t(2\vec{a}+3\vec{b})\ (t\text{ は実数})$$

とおける。

CA ⊥ OA より　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$　すなわち　$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$$\{\vec{a}-(2t\vec{a}+3t\vec{b})\}\cdot\vec{a}=0$$

$$|\vec{a}|^2-2t|\vec{a}|^2-3t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$9-18t-12t=0\qquad t=\frac{3}{10}$$

したがって　$\vec{c}=\frac{3}{5}\vec{a}+\frac{9}{10}\vec{b}$

PART3　ベクトルの終点の存在範囲

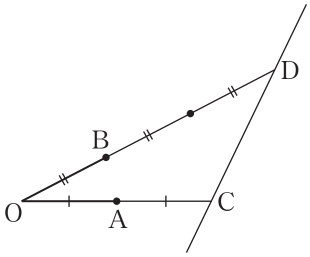
3　△OAB に対し，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ とする。実数 s，t が次の条件を満たすとき，点Pの存在範囲を求めよ。

(1)　$\dfrac{s}{2}+\dfrac{t}{3}=1$　　(2)　$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$，$1\leqq s+t\leqq 2$

(1)　$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\dfrac{s}{2}(2\overrightarrow{OA})+\dfrac{t}{3}(3\overrightarrow{OB})$

よって，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OC}$，$3\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OD}$ とすると

点Pの存在範囲は直線CD



(2)　$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$ とすると，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$ より，点Pの存在範囲は平行四辺形OACBの周および内部に限られる。

$s+t=k$ とおくと，$1\leqq k\leqq 2$

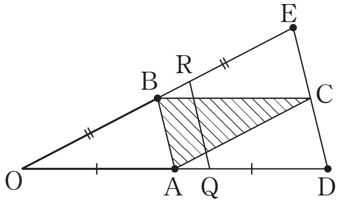
このとき　$\dfrac{s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{s}{k}\geqq 0$，$\dfrac{t}{k}\geqq 0$

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}=\frac{s}{k}(k\overrightarrow{OA})+\frac{t}{k}(k\overrightarrow{OB})$$

$k\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OQ}$，$k\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OR}$ とし，k を固定すると，点Pの存在範囲は，辺ABに平行な線分QRである。

ここで，$2\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OD}$，$2\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OE}$ とし，k を $1\leqq k\leqq 2$ の範囲で変化させると，

点Pの存在範囲は △ABC の周および内部



第 12 講　空間のベクトル

PART1　空間の座標

1 (1) 3 点 A(3, 2, 0)，B(−1, 4, −2)，C(2, 0, −1) から等距離にある yz 平面上の点 P の座標を求めよ。

(2) 2 点 A(2, −1, 1)，B(1, 4, 3) と，xy 平面上の点 P に対して，AP＋PB の最小値を求めよ。

(1) P(0, y, z) とする。

AP＝BP より　$AP^2=BP^2$

よって　$(0-3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(0+1)^2+(y-4)^2+(z+2)^2$

$y-z=2$ …… ①

AP＝CP より　$AP^2=CP^2$

よって　$(0-3)^2+(y-2)^2+(z-0)^2=(0-2)^2+(y-0)^2+(z+1)^2$

$2y+z=4$ …… ②

①，②より　$y=2$，$z=0$　　したがって，点 P の座標は　(0, 2, 0)

(2) 2 点 A，B は，xy 平面に関して同じ側にある。

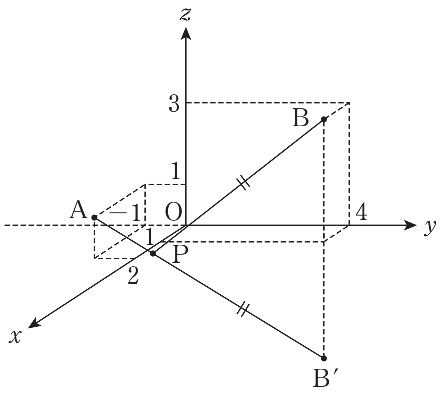
xy 平面に関して点 B と対称な点を B′ とすると

B′(1, 4, −3)

PB＝PB′ であるから

AP＋PB＝AP＋PB′ ≧ AB′

したがって，AP＋PB が最小となるのは，3 点 A，P，B′ が一直線上にあるとき，すなわち点 P が線分 AB′ と xy 平面の交点のときである。



よって，求める最小値は　$AB'=\sqrt{(1-2)^2+(4+1)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{42}$

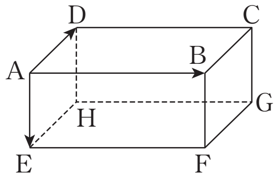
PART2　空間ベクトルの内積

2　直方体 ABCD－EFGH において，AB＝4，AD＝2，AE＝1 とする。$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{AG}$，$\overrightarrow{BH}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　内積 $\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}$ を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角は 120° より大きいか小さいかを調べよ。



(1)　$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CG}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(別解)　$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=(\vec{b}+\vec{c})-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$

(2)　$\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

$$=|\vec{b}+\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2-|\vec{a}|^2=2^2+1^2-4^2=-11$$

(3)　$|\overrightarrow{AG}|=\sqrt{4^2+2^2+1^2}=\sqrt{21}$，$|\overrightarrow{BH}|=\sqrt{21}$

$\overrightarrow{AG}$ と $\overrightarrow{BH}$ のなす角を θ とすると

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{BH}}{|\overrightarrow{AG}||\overrightarrow{BH}|}=-\frac{11}{\sqrt{21}\sqrt{21}}=-\frac{11}{21}<-\frac{1}{2}=\cos 120^\circ$$

よって，なす角は 120° より大きい。

PART3　三角形の面積，2つのベクトルに垂直な単位ベクトル

3　[1]　A(2, 1, 3)，B(2, −2, 0)，C(4, 2, −4) とするとき，内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ を求めよ。また，△ABC の面積を求めよ。

[2]　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ -2,\ 2)$，$\vec{b}=(2,\ 3,\ -10)$ の両方に垂直な単位ベクトルを求めよ。

[1]　$\overrightarrow{AB}=(0,\ -3,\ -3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,\ 1,\ -7)$

よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=0\times2+(-3)\times1+(-3)\times(-7)=18$

$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{0^2+(-3)^2+(-3)^2}=\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{2^2+1^2+(-7)^2}=\sqrt{54}=3\sqrt{6}$

よって　$\cos A=\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\dfrac{18}{3\sqrt{2}\times3\sqrt{6}}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin A>0$ より $\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

したがって　$\triangle ABC=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A=\dfrac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times3\sqrt{6}\times\dfrac{\sqrt{6}}{3}=9\sqrt{2}$

(△ABC の面積を求める別解)

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18\times54-18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{18\times36}=9\sqrt{2}$$

[2]　求める単位ベクトルを $\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$　　よって　$x-2y+2z=0$ …… ①

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$　　よって　$2x+3y-10z=0$ …… ②

$|\vec{e}|=1$ より　$|\vec{e}|^2=1^2$　　よって　$x^2+y^2+z^2=1$ …… ③

①，②より　$x=2z,\ y=2z$

これらを③に代入して　$9z^2=1$　　$z^2=\dfrac{1}{9}$　　よって　$z=\pm\dfrac{1}{3}$

よって，求める単位ベクトルは

$$\vec{e}=\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \left(-\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right)$$

第13講　空間図形とベクトル
PART1　位置ベクトル

1　1辺の長さが1の立方体 ABCD－EFGH において，辺 AB，CG，HE を $t:(1-t)$ に内分する点をそれぞれ P，Q，R とし，$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　$\overrightarrow{PQ}$，$\overrightarrow{PR}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{PQ}$ と $\overrightarrow{PR}$ のなす角 θ を求めよ。

(1)　$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}$

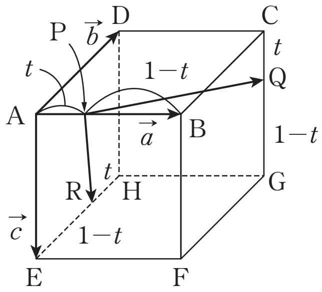
$=\{(1-t)\overrightarrow{AC}+t\overrightarrow{AG}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=(1-t)(\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})-t\vec{a}=(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}$

$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{AR}-\overrightarrow{AP}$

$=\{t\overrightarrow{AE}+(1-t)\overrightarrow{AH}\}-t\overrightarrow{AB}$

$=t\vec{c}+(1-t)(\vec{b}+\vec{c})-t\vec{a}=-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}$



(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より

$|\overrightarrow{PQ}|^2=|(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}|^2$

$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+t^2|\vec{c}|^2+2(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2t\vec{b}\cdot\vec{c}+2t(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=(1-t)^2\times1^2+1^2+t^2\times1^2=2t^2-2t+2$

$|\overrightarrow{PR}|^2=|-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}|^2$

$=(-t)^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=t^2\times1^2+(1-t)^2\times1^2+1^2=2t^2-2t+2$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}=\{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\{-t\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}$

$=(1-t)\times(-t)+1\times(1-t)+t\times1=t^2-t+1$

よって　$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{PR}}{|\overrightarrow{PQ}||\overrightarrow{PR}|}=\dfrac{t^2-t+1}{\sqrt{2t^2-2t+2}\sqrt{2t^2-2t+2}}=\dfrac{t^2-t+1}{2(t^2-t+1)}=\dfrac{1}{2}$

$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$ より　$\theta=60^\circ$

PART2　共線条件

2 (1) 3点 A$(-1,\ -1,\ -1)$，B$(1,\ 2,\ 3)$，C$(x,\ y,\ 1)$ が一直線上にあるとき，x，y の値を求めよ。

(2) 四面体ABCDにおいて，△BCD の重心をGとする。ある実数 k について，$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点Pは，2点A，Gを通る直線上にあることを証明せよ。

(1) 3点A，B，Cが一直線上にあるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす実数 k が存在する。

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(2,\ 3,\ 4),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}}=(x+1,\ y+1,\ 2)$$

であるから　$(x+1,\ y+1,\ 2)=k(2,\ 3,\ 4)$　より

$$x+1=2k,\ y+1=3k,\ 2=4k$$

よって　$k=\dfrac{1}{2}$　　したがって　$x=0,\ y=\dfrac{1}{2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ …… ①

$k\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より

$$-k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+(\overrightarrow{\mathrm{AD}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})$$

$$(3-k)\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\ \cdots\cdots ②$$

$k=3$ のとき　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{0}$

このとき①より　$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\vec{0}$ であるから 不適

よって　$k\neq 3$

このとき②より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{1}{3-k}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$ …… ③

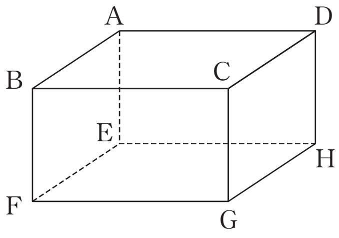
①，③より　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\dfrac{3}{3-k}\overrightarrow{\mathrm{AG}}$

ゆえに，3点A，G，Pは一直線上にある。

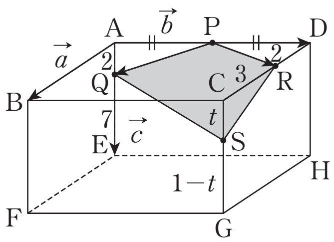
したがって，点Pは2点A，Gを通る直線上にある。

PART3　共面条件

3　直方体 ABCD－EFGH において，辺 AD の中点を P，辺 AE を 2：7 に内分する点を Q，辺 DC を 2：3 に内分する点を R，辺 CG を t：$(1-t)$ $(0<t<1)$ に内分する点を S とする。4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，t の値を求めよ。



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。



（解法 1）

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DR}=\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PD}+\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CS}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots ①$$

4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}$$

と表される。

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\left(-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{2}{9}\vec{c}\right)+\beta\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\beta\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\alpha\vec{c}\ \cdots\cdots ②$$

であるから，①，②より

$$\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+t\vec{c}=\frac{2}{5}\beta\vec{a}+\left(-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\alpha\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$1=\frac{2}{5}\beta,\quad \frac{1}{2}=-\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta,\quad t=\frac{2}{9}\alpha$$

したがって　$\alpha=\dfrac{3}{2}$，$\beta=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{1}{3}$

（解法 2）

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{2}\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{2}{9}\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CS}}=\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}\ \cdots\cdots①$$

4 点 P，Q，R，S が同一平面上にあるとき，実数 α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AR}},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

と表される。

$$\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}\alpha\vec{b}+\frac{2}{9}\beta\vec{c}+\gamma\left(\frac{2}{5}\vec{a}+\vec{b}\right)$$

$$=\frac{2}{5}\gamma\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\gamma\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\beta\vec{c}\ \cdots\cdots②$$

であるから，①，②より

$$\vec{a}+\vec{b}+t\vec{c}=\frac{2}{5}\gamma\vec{a}+\left(\frac{1}{2}\alpha+\gamma\right)\vec{b}+\frac{2}{9}\beta\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立であるから

$$1=\frac{2}{5}\gamma,\ 1=\frac{1}{2}\alpha+\gamma,\ t=\frac{2}{9}\beta,\ \alpha+\beta+\gamma=1$$

したがって　$\alpha=-3$，$\beta=\dfrac{3}{2}$，$\gamma=\dfrac{5}{2}$，$t=\dfrac{1}{3}$

第14講　空間ベクトルの様々な問題，空間座標における図形

PART1　直線と平面の交点

1　四面体OABCにおいて，辺OA，OB，OCを2：1に内分する点をそれぞれ A′，B′，C′ とし，直線 BC′ と直線 B′C との交点を D，3点 A′，B，C を通る平面と直線 AD の交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

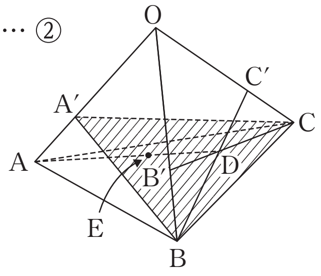
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(1)　点Dは直線 BC′ 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}\quad(t\text{ は実数})\cdots\cdots①$$

点Dは直線 B′C 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+s\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}\quad(s\text{ は実数})\cdots\cdots②$$



①，②より

$$(1-t)\vec{b}+\frac{2}{3}t\vec{c}=\frac{2}{3}(1-s)\vec{b}+s\vec{c}$$

$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから

$$1-t=\frac{2}{3}(1-s),\quad \frac{2}{3}t=s$$

$$s=\frac{2}{5},\quad t=\frac{3}{5}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{5}\vec{b}+\frac{2}{5}\vec{c}$

(2)　点Eは直線 AD 上にあるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OE}}&=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+u\overrightarrow{\mathrm{OD}}\\&=(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{5}u\vec{b}+\frac{2}{5}u\vec{c}\\&=\frac{3}{2}(1-u)\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\frac{2}{5}u\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{2}{5}u\overrightarrow{\mathrm{OC}}\quad(u\text{ は実数})\end{aligned}$$

点 E は平面 A′BC 上にあるから

$$\frac{3}{2}(1-u)+\frac{2}{5}u+\frac{2}{5}u=1$$

$$u=\frac{5}{7}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{2}{7}\vec{c}$

PART2 直線と平面の垂直

2 原点Oおよび3点 A(1, 0, 0), B(2, 1, 0), C(0, 0, 2) がある。点Oから平面ABCに下ろした垂線の足をHとする。次の問いに答えよ。

(1) 点Hの座標を求めよ。

(2) 四面体OABCの体積を求めよ。

(1) $\overrightarrow{AB}=(1,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 0,\ 2)$

点Hは平面ABC上の点であるから，s, t を実数として

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=(1,\ 0,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)+t(-1,\ 0,\ 2)=(s-t+1,\ s,\ 2t)$$

OH ⊥ 平面ABCより　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より　$(s-t+1)\times1+s\times1+2t\times0=0$

よって　$2s-t=-1$ …… ①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より　$(s-t+1)\times(-1)+s\times0+2t\times2=0$

よって　$-s+5t=1$ …… ②

①, ②より　$s=-\dfrac{4}{9}$, $t=\dfrac{1}{9}$

よって　$\overrightarrow{OH}=\left(-\dfrac{4}{9}-\dfrac{1}{9}+1,\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)=\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$ であるから

点Hの座標は　$\left(\dfrac{4}{9},\ -\dfrac{4}{9},\ \dfrac{2}{9}\right)$

(2) $\overrightarrow{OH}=\dfrac{2}{9}(2,\ -2,\ 1)$ より　$|\overrightarrow{OH}|=\dfrac{2}{9}\sqrt{2^2+(-2)^2+1^2}=\dfrac{2}{9}\times3=\dfrac{2}{3}$

また, $|\overrightarrow{AB}|^2=1^2+1^2+0^2=2$, $|\overrightarrow{AC}|^2=(-1)^2+0^2+2^2=5$,

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\times(-1)+1\times0+0\times2=-1$ より

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\times5-(-1)^2}=\frac{3}{2}$$

よって，求める体積は

$$\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

PART3　ベクトル方程式

3　点 $(1,\ 2,\ 0)$ を通り，$\vec{u}=(1,\ 1,\ -1)$ に平行な直線を l，2点 $(4,\ 2,\ 0)$，$(5,\ 3,\ 0)$ を通る直線を m とする。また，点 $(2,\ 2,\ 1)$ を中心とする半径 $\sqrt{3}$ の球面を S とする。

(1)　直線 l と yz 平面の交点の座標を求めよ。

(2)　直線 l 上の点 P と直線 m 上の点 Q の最短距離を求めよ。

(3)　球面 S の方程式を求めよ。また，球面 S と直線 l が共有点をもつか調べよ。

(1)　直線 l の方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 0)+t(1,\ 1,\ -1)=(1+t,\ 2+t,\ -t)\ \ (t\text{ は実数})$$

直線 l と yz 平面，すなわち $x=0$ との交点は $1+t=0$ より $t=-1$ のときで，その座標は

$$(0,\ 1,\ 1)$$

(2)　直線 m の方向ベクトルの 1 つは $(1,\ 1,\ 0)$ であるから，その方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(4,\ 2,\ 0)+s(1,\ 1,\ 0)=(4+s,\ 2+s,\ 0)\ \ (s\text{ は実数})$$

よって，2 点 P，Q の座標は

$$\mathrm{P}(1+t,\ 2+t,\ -t),\ \mathrm{Q}(4+s,\ 2+s,\ 0)$$

と表される。このとき

$$\mathrm{PQ}^2=(s-t+3)^2+(s-t)^2+t^2$$
$$=2s^2-2(2t-3)s+3t^2-6t+9$$
$$=2\left(s-t+\frac{3}{2}\right)^2+t^2+\frac{9}{2}$$

よって，PQ^2 は $s-t=-\dfrac{3}{2}$ かつ $t=0$　すなわち，$t=0$，$s=-\dfrac{3}{2}$ のとき最小値 $\dfrac{9}{2}$ をとる。

$\mathrm{PQ}>0$ より，求める最短距離は $\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$

(3)　中心 $(2,\ 2,\ 1)$，半径 $\sqrt{3}$ の球面 S の方程式は

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=3$$

これに $x=1+t$，$y=2+t$，$z=-t$ を代入して

$$(t-1)^2+t^2+(-t-1)^2=3 \qquad t=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

よって，実数 t が存在するので，球面 S と直線 l は共有点をもつ。

確認問題　解答

第 1 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-4，ウエ：51，オ：②，
カキク：300，ケコ：24

[解説]

(1)　初項を a，公差を d とおくと

$$a_n = a+(n-1)d$$ [A]

$a_5=31$，$a_{20}=-29$ より

$$\begin{cases} a+4d=31 \\ a+19d=-29 \end{cases}$$

ゆえに　$a=47$，$d=-4$

よって，一般項は

$$a_n = 47+(n-1)\cdot(-4) = \boldsymbol{-4n+51}$$

和は

$$S_n = \frac{n}{2}\{2\cdot 47+(n-1)\cdot(-4)\}$$ [B]

$$= \frac{n}{2}(98-4n) = \boldsymbol{n(49-2n)}$$

(2)　$a_n<0$ とすると　$-4n+51<0$

$$n > \frac{51}{4} = 12.75$$

よって，$1 \leqq n \leqq 12$ のとき $a_n>0$，$n \geqq 13$ のとき $a_n<0$ であるから，S_n は $n=12$ のとき最大値

$$S_{12} = 12(49-2\cdot 12) = \boldsymbol{300}$$ [C]

をとる。

（別解）

$$S_n = -2n^2+49n$$

$$= -2\left(n-\frac{49}{4}\right)^2 + 2\cdot\left(\frac{49}{4}\right)^2$$

よって，$\dfrac{49}{4}=12.25$ に最も近い自然数 $n=12$

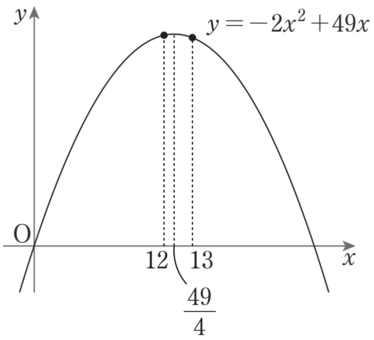
[A]　初項 a，公差 d の等差数列の一般項は
$a_n = a+(n-1)d$

[B]　初項 a，公差 d，末項 l，項数 n の等差数列の和は
$S_n = \dfrac{1}{2}n(a+l)$
$= \dfrac{1}{2}n\{2a+(n-1)d\}$

[C]　初項 a が正，公差 d が負である等差数列の和の最大値は，正の項の総和である。

のとき，S_n は最大値

$S_{12}=12(49-2\cdot12)=\mathbf{300}$ をとる。



(3)　$S_n=0$ とすると　$n(49-2n)=0$

0 または $\dfrac{49}{2}=24.5$ に近い自然数を考えると

$n=1,\ 24,\ 25$

よって，最小値の候補は　$|S_1|,\ |S_{24}|,\ |S_{25}|$

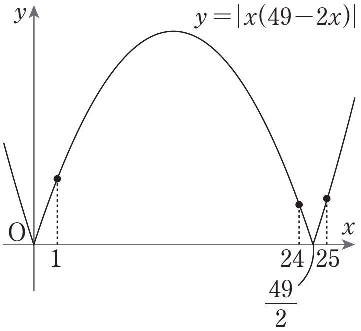
$|S_1|=|47|=47$

$|S_{24}|=|24(49-2\cdot24)|=|24|=24$

$|S_{25}|=|25(49-2\cdot25)|=|-25|=25$

したがって，$n=24$ のとき，$|S_n|$ は最小値 **24**

をとる。



第１講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** アイウ：256，エオ：81

[解説]

初項を a，公比を r とおくと　$a_n=ar^{n-1}$ **[A]**

$\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\dfrac{1}{a_3}+\cdots\cdots+\dfrac{1}{a_{16}}=\dfrac{3}{2}$ より

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{ar}+\frac{1}{ar^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{ar^{15}}=\frac{3}{2}$$

$$r^{15}+r^{14}+r^{13}+\cdots\cdots+1=\frac{3}{2}ar^{15}$$

$$ar^{15}+ar^{14}+ar^{13}+\cdots\cdots+a=\frac{3}{2}a^2r^{15}$$

よって

$$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{16}=\frac{3}{2}a^2r^{15}$$

条件より，$a_1+a_2+a_3+\cdots\cdots+a_{16}=\sqrt{3}$ であるから

$$\sqrt{3}=\frac{3}{2}a^2r^{15}$$

$$a^2r^{15}=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

したがって

$$\begin{aligned}a_1a_2a_3\cdots\cdots a_{16}&=a\cdot ar\cdot ar^2\cdot\cdots\cdots\cdot ar^{15}\\&=a^{16}\cdot r^{1+2+\cdots\cdots+15}\\&=a^{16}\cdot r^{120}=(a^2r^{15})^8\\&=\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^8=\mathbf{\frac{256}{81}}\end{aligned}$$

［A］　初項 a，公比 r の等比数列の一般項は

$a_n=ar^{n-1}$

第 1 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-3，ウエ：-3，オカ：-1，キ：1，
ク：2，ケ：2

[解説]

解と係数の関係より [A]

$$\alpha+\beta+\gamma=-\frac{a}{2} \quad \cdots\cdots①$$

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\frac{b}{2} \quad \cdots\cdots②$$

$$\alpha\beta\gamma=-\frac{2}{2}=-1 \quad \cdots\cdots③$$

また，α，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$が等差数列をなすとき

$$\frac{\alpha+\gamma}{2}=\beta \qquad \text{つまり} \quad \alpha+\gamma=2\beta \quad \cdots\cdots④$$ [B]

③より，α，β，γ はすべて負，または，2 数が正で 1 数が負である。

(i)　α，β，γ がすべて負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より，等比数列の中央の項は　β

よって　$\beta^2=\alpha\gamma$ [C]

これと③より　$\beta^3=-1$

β は実数であるから　$\beta=-1$

このとき，④より　$\alpha+\gamma=-2$

③より　$\alpha\gamma=1$

したがって，α，γ は 2 次方程式 $t^2+2t+1=0$ の 2 つの解である。 [D]

$(t+1)^2=0$ より　$t=-1$

よって　$\alpha=\gamma=-1$

これは $\alpha<\beta<\gamma$ を満たさず不適。

(ii)　α，β，γ のうち 2 数が正で 1 数が負のとき

$\alpha<\beta<\gamma$ より，$\alpha<0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ である。

> [A]　3 次方程式の解と係数の関係
> 3 次方程式 $ax^3+bx^2+cx+d=0$ の 3 つの解を α，β，γ とすると
> $\alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a}$，
> $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a}$，
> $\alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a}$

> [B]　数列 a，b，c が等差数列
> $\Longleftrightarrow 2b=a+c$

> [C]　数列 a，b，c が等比数列
> $\Longleftrightarrow b^2=ac$

> [D]　$a+b=p$，$ab=q$ のとき，a，b は 2 次方程式 $x^2-px+q=0$ の 2 つの解である。

α，β，γ が等比数列をなすとき，公比は負であり，等比数列の中央の項は α である。

よって　$\alpha^2=\beta\gamma$ [C]

これと③より　$\alpha^3=-1$

α は実数であるから　$\alpha=-1$

このとき，④より　$-1+\gamma=2\beta$

すなわち　$\gamma=2\beta+1$

③より　$\beta\gamma=1$

よって　$\beta(2\beta+1)=1$

$$2\beta^2+\beta-1=0$$

$$(\beta+1)(2\beta-1)=0$$

$\beta>0$ より　$\beta=\dfrac{1}{2}$

このとき $\gamma=2$ となり，$\alpha<\beta<\gamma$ を満たす。

①，②より　$a=-3$，$b=-3$

(i)，(ii)より

$$\boldsymbol{a=-3,\ b=-3,\ \alpha=-1,\ \beta=\frac{1}{2},\ \gamma=2}$$

第 2 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：4，ウ：6，エ：4，オ：①，
カ：⑩，キ：⑨，ク：②，ケ：③，コ：⑧

[解説]

$(k+1)^4-k^4=4k^3+6k^2+4k+1$ において

$k=1$ のとき　$2^4-1^4=4\cdot1^3+6\cdot1^2+4\cdot1+1$

$k=2$ のとき　$3^4-2^4=4\cdot2^3+6\cdot2^2+4\cdot2+1$

$k=3$ のとき　$4^4-3^4=4\cdot3^3+6\cdot3^2+4\cdot3+1$

⋮

$k=n$ のとき　$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$

これらの式を辺々加えると

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{n+1})^4-\boldsymbol{1}&=\boldsymbol{4}\sum_{k=1}^{n}k^3+\boldsymbol{6}\sum_{k=1}^{n}k^2+\boldsymbol{4}\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{1}\\&=4\sum_{k=1}^{n}k^3+6\cdot\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{6}}\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}\\&\qquad+4\cdot\frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}}\boldsymbol{n(n+1)}+\boldsymbol{n}\end{aligned}$$ [A]

したがって

$$\begin{aligned}4\sum_{k=1}^{n}k^3&=(n+1)^4-n(n+1)(2n+1)\\&\qquad-2n(n+1)-(n+1)\\&=(\boldsymbol{n+1})\{(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1\}\\&=\boldsymbol{n}^2(\boldsymbol{n+1})^2\end{aligned}$$

よって

$$\sum_{k=1}^{n}k^3=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2=\left\{\frac{1}{2}n(n+1)\right\}^2$$

[A]　和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}c=nc$（$c$ は定数）

特に　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}1=n$

2 [正解] サ：1，シ：3，ス：1，セ：2

[解説]

与えられた数列の第k項を a_k, 求める和を S_n とする。

$$a_k = 2+4+6+\cdots\cdots+2k = \frac{k}{2}(2+2k) \quad \text{[B]}$$

$$= k(k+1)$$

[B]　初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n = \frac{1}{2}n(a+l)$$

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} (k^2+k)$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \quad \text{[A]}$$

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{(2n+1)+3\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

3 [正解] ソ：2，タ：2，チ：2，ツ：4

[解説]

与えられた数列の第k項を a_k, 求める和を S_n とする。

$$a_k = 2+4+8+\cdots\cdots+2^k = \frac{2\cdot(2^k-1)}{2-1} \quad \text{[C]}$$

$$= 2^{k+1}-2$$

[C]　初項 a，公比 r，項数 n の等比数列の和 S_n は，$r \neq 1$ のとき

$$S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{a(r^n-1)}{r-1}$$

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} (2^{k+1}-2)$$

$$= \frac{4\cdot(2^n-1)}{2-1} - 2n = \boldsymbol{2^{n+2}-2n-4} \quad \text{[C]}$$

4 **[正解]** テ：1，ト：3，ナ：1，ニ：2

[解説]

与えられた数列の第k項を a_k, 求める和を S_n とする。

$$a_k = 2k(n-k+1) = -2k^2 + 2(n+1)k$$

よって

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \{-2k^2 + 2(n+1)k\}$$ [D]

[D]　k 以外の文字は定数とみなす。

$$= -2 \cdot \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + 2(n+1) \cdot \frac{1}{2}n(n+1)$$ [A]

$$= \frac{1}{6}n(n+1)\{-2(2n+1)+6(n+1)\}$$

$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)}$$

第２講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：6，ウ：9，エオ：26，カ：6

[解説]

与えられた数列を $\{a_n\}$，数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$，数列 $\{b_n\}$ の階差数列を $\{c_n\}$ とする。[A]

$\{a_n\}$：2,　3,　3,　3,　4,　7,　13,　23,　……

$\{b_n\}$：　1,　0,　0,　1,　3,　6,　10,　……

$\{c_n\}$：　−1,　0,　1,　2,　3,　4,　……

数列 $\{c_n\}$ は，初項 −1，公差 1 の等差数列であるから

$$c_n=-1+(n-1)\cdot 1=n-2$$

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}c_k=1+\sum_{k=1}^{n-1}(k-2)\quad\text{[B]}$$

$$=1+\frac{1}{2}(n-1)n-2(n-1)\quad\text{[C]}$$

$$=\frac{1}{2}(n^2-5n+6)$$

この式において，$n=1$ のとき $\frac{1}{2}(1^2-5\cdot 1+6)=1$ であるから，b_1 と一致する。

したがって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(k^2-5k+6)\quad\text{[B]}$$

$$=2+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-5\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+6(n-1)\right\}\quad\text{[C]}$$

$$=\frac{1}{6}(n^3-9n^2+26n-6)$$

この式において，

$n=1$ のとき

[A]　数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ を調べても規則性がつかめないときは，数列 $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ を調べてみるとよい。

[B]　階差数列
数列 $\{a_n\}$ の階差数列を $\{b_n\}$ とすると，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k$$

[C]　和の公式

$$\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

$$\sum_{k=1}^{n}c=nc\ (c\text{ は定数})$$

特に $\sum_{k=1}^{n}1=n$

$\frac{1}{6}(1^3-9\cdot1^2+26\cdot1-6)=2$ であるから，

a_1 と一致する。

よって，求める数列の一般項は

$$\boldsymbol{a_n=\frac{1}{6}(n^3-9n^2+26n-6)}$$

2

[正解] キ：4，ク：5，ケ：4，コ：9

[解説]

(1)　$a_1=S_1=2\cdot1^2+7\cdot1=9$ [D]

$n\geqq2$ のとき

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2n^2+7n-\{2(n-1)^2+7(n-1)\}\\&=4n+5\end{aligned}$$

この式において，$n=1$ のとき $4+5=9$ であるから，a_1 と一致する。

したがって　$\boldsymbol{a_n=4n+5}$

(2)　数列 a_2，a_4，a_6，…… の第 k 項は

$$a_{2k}=4\cdot2k+5=8k+5$$

よって，求める和は

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}a_{2k}&=\sum_{k=1}^{n}(8k+5)\ \text{[C]}\\&=8\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+5n\\&=\boldsymbol{4n^2+9n}\end{aligned}$$

[D]　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n とすると

$n\geqq2$ のとき

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$n=1$ のとき

$a_1=S_1$

第 2 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：4，イウ：15，エ：2，オ：3，カ：2，キ：5

[解説]

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\right\} \quad \text{[A]}$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)(2k+5)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}-\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{5\cdot7}\right)+\left(\frac{1}{5\cdot7}-\frac{1}{7\cdot9}\right)+\left(\frac{1}{7\cdot9}-\frac{1}{9\cdot11}\right)\right.$$

$$+\cdots\cdots+\left\{\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}-\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right\}$$

$$\left.+\left\{\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}\right]$$

$$=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3\cdot5}-\frac{1}{(2n+3)(2n+5)}\right\}$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\frac{(2n+3)(2n+5)-15}{15(2n+3)(2n+5)}$$

$$=\boldsymbol{\frac{n(n+4)}{15(2n+3)(2n+5)}}$$

[A]　部分分数分解

$$\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{k(k+1)}-\frac{1}{(k+1)(k+2)}\right\}$$

2 [正解] ク：2，ケ：1，コ：①，サ：1

[解説]

求める和を S とおくと

$$S=3\cdot1+5\cdot2+7\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n+1)\cdot2^{n-1}$$

$$2S=\qquad 3\cdot2+5\cdot2^2+\cdots\cdots+(2n-1)\cdot2^{n-1}+(2n+1)\cdot2^n$$

[B]

辺々の差をとると

$$-S=3+2\left(2+2^2+\cdots\cdots+2^{n-1}\right)-(2n+1)\cdot2^n$$

$$=3+2\cdot\frac{2\left(2^{n-1}-1\right)}{2-1}-(2n+1)\cdot2^n$$

$$=3+2\cdot2^n-4-(2n+1)\cdot2^n$$

$$=-(2n-1)\cdot2^n-1$$

よって，求める和は

$$\boldsymbol{S=(2n-1)\cdot2^n+1}$$

[B]　一般項が（等差数列）×（等比数列）の形をした数列の和 S は，等比数列の公比 r を用いて，$S-rS$ を計算すると求めることができる。

第3講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：34，ウエ：39，オカ：40，
キクケ：790

[解説]

与えられた数列を，分母が等しい分数を群として分けると

$$\frac{1}{1}\Bigg|\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\Bigg|\frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3}\Bigg|\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4}\Bigg|\frac{1}{5},\ \cdots\cdots$$

[A]

となり，第 n 群に n 個の項を含む。

第 n 群の

初項は $\dfrac{1}{n}$　　k 番目の項は $\dfrac{2k-1}{n}$

末項は $\dfrac{2n-1}{n}$

である。

また，第1群から第 n 群までの項数は

$$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$$

である。

(1) $\dfrac{11}{8}=\dfrac{2\cdot6-1}{8}$ は，第8群の6番目の項である。

第7群までの項数は $\dfrac{1}{2}\cdot7\cdot8=28$ であるから，

$\dfrac{11}{8}$ は $28+6=34$ より，第 **34** 項である。

(2) 第800項が第 n 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(n-1)n<800\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$(n-1)n<1600\leqq n(n+1)$$

$39\cdot40=1560$，$40\cdot41=1640$ より，

不等式を満たす自然数は　$n=40$

> [A]　数列を，ある規則によっていくつかの群に分けて考える（群数列として考える）とき，
> ・もとの数列の一般項や規則性
> ・第 n 群の項数，初項，k 番目の項，末項
> などに着目するとよい。

よって，第 800 項は，第 40 群に属する。

第 39 群までの項数は $\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40=780$ であるから，$800-780=20$ より，求める項は第 40 群の 20 番目の項，すなわち $\frac{2\cdot 20-1}{40}=\mathbf{\frac{39}{40}}$ である。

(3) 第 n 群に含まれるすべての項の和は

$$\frac{1}{2}n\left(\frac{1}{n}+\frac{2n-1}{n}\right)=n$$ [B]

よって，求める和は

$$\sum_{k=1}^{39}k+\left(\frac{1}{40}+\frac{3}{40}+\cdots\cdots+\frac{39}{40}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot 39\cdot 40+\frac{20}{2}\left(\frac{1}{40}+\frac{39}{40}\right)=\mathbf{790}$$ [B]

[B] 初項 a，末項 l，項数 n の等差数列の和 S_n は

$$S_n=\frac{1}{2}n(a+l)$$

第3講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：4

[解説]

$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n-2$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 -2 の等差数列である。［A］

よって　$a_n=2+(n-1)\cdot(-2)=\boldsymbol{-2n+4}$

［A］　$a_{n+1}=a_n+d$
公差 d の等差数列

2

[正解] エオ：-1，カ：2，キ：③

[解説]

$a_1=\dfrac{1}{4}$，$a_{n+1}=-\dfrac{1}{2}a_n$ より，数列 $\{a_n\}$ は初項 $\dfrac{1}{4}$，公比 $-\dfrac{1}{2}$ の等比数列である。［B］

よって　$a_n=\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=\boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}}$

［B］　$a_{n+1}=ra_n$
公比 r の等比数列

3

[正解] ク：③，ケ：2，コ：2，サ：6

[解説]

$a_{n+1}-a_n=2^{n+1}+4n+4$ より，数列 $\{a_n\}$ の階差数列 $\{b_n\}$ の第 n 項は

$$b_n=2^{n+1}+4n+4$$ ［C］

よって，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}b_k=2+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k+1}+4k+4)$$

$$=2+\frac{4(2^{n-1}-1)}{2-1}+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n+4(n-1)$$

$$=2^{n+1}+2n^2+2n-6$$

$a_1=2$ より，この式は $n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\boldsymbol{2^{n+1}+2n^2+2n-6}$

［C］　$a_{n+1}=a_n+f(n)$
$b_n=f(n)$ が数列 $\{a_n\}$ の階差数列の一般項

4 **[正解]** シ：5，ス：4，セ：3，ソ：1

[解説]

$a_{n+1}=\dfrac{4}{3}a_n+\dfrac{1}{3}$ より

$$a_{n+1}+1=\dfrac{4}{3}(a_n+1)$$ [D]

よって，数列 $\{a_n+1\}$ は初項 $a_1+1=5$，公比 $\dfrac{4}{3}$ の等比数列である。

したがって　$a_n+1=5\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}$

ゆえに　$a_n=\mathbf{5}\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{n-1}\mathbf{-1}$

[D]　$a_{n+1}=pa_n+q$
$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ と変形すると，
数列 $\{a_n-\alpha\}$ は等比数列

5 **[正解]** タ：1，チ：5，ツテ：−3，ト：2

[解説]

$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{8a_n-3}$ ……①　において，$a_{n+1}=0$ であると仮定すると，$a_n=0$ である。

よって，$a_n=0$ となる n があると仮定すると，

$a_{n-1}=a_{n-2}=\cdots\cdots=a_1=0$ となり，

$a_1=\dfrac{1}{7}$ であることに矛盾する。

よって，すべての自然数 n について，$a_n\neq 0$ である。

①の両辺の逆数をとると

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{8a_n-3}{a_n}=-\frac{3}{a_n}+8$$ [E]

$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくと

$$b_{n+1}=-3b_n+8,\quad b_1=\frac{1}{a_1}=7$$

ゆえに

$$b_{n+1}-2=-3(b_n-2),\quad b_1-2=7-2=5$$

よって，数列 $\{b_n-2\}$ は初項 5，公比 −3 の等比数列であるから

$$b_n-2=5\cdot(-3)^{n-1}$$

ゆえに　$b_n=5\cdot(-3)^{n-1}+2$

したがって　$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\boldsymbol{\dfrac{1}{5\cdot(-3)^{n-1}+2}}$

[E]　両辺の逆数をとり，$\dfrac{1}{a_n}=b_n$ とおくことで，b_n の漸化式から一般項を求める。

6 [正解] ナ：1，ニ：3，ヌ：①

[解説]

$3na_{n+1}=(n+1)a_n$ の両辺を $n(n+1)$ で割ると

$$3\cdot\frac{a_{n+1}}{n+1}=\frac{a_n}{n}$$

すなわち　$\dfrac{a_{n+1}}{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a_n}{n}$ [F]

[F]　$f(n+1)a_{n+1}=pf(n)a_n$ の形に変形する。

$\dfrac{a_n}{n}=b_n$ とおくと　$b_{n+1}=\dfrac{1}{3}b_n$，　$b_1=\dfrac{a_1}{1}=3$

よって　$b_n=3\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$

ゆえに　$\dfrac{a_n}{n}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}$

したがって　$a_n=\boldsymbol{n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}}$

（別解）

$3na_{n+1}=(n+1)a_n$ より　$a_{n+1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n+1}{n}a_n$

よって

$n\geqq 2$ のとき　$a_n=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n}{n-1}a_{n-1}$

$n\geqq 3$ のとき　$a_{n-1}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

よって　$a_n=\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\cdot\dfrac{n}{n-1}\cdot\dfrac{n-1}{n-2}a_{n-2}$

これを繰り返すと，$n\geqq 2$ のとき

$$a_n=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdot\cdots\cdots\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{1}a_1$$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{n}{1}\cdot 3=n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-2}$$

これは，$n=1$ のときも成り立つ。

したがって　$a_n=\boldsymbol{n\cdot\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}}$

第 3 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-3，ウ：3，エオ：-2，カ：4，
キ：8，ク：9，ケ：4，コ：3

[解説]

(1)　$a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$ の左辺に，[A]
$a_{n+1}=6a_n+6b_n$，$b_{n+1}=-a_n+b_n$ を代入すると

$$6a_n+6b_n-\alpha(-a_n+b_n)=\beta(a_n-\alpha b_n)$$

すなわち

$$(6+\alpha)a_n+(6-\alpha)b_n=\beta a_n-\alpha\beta b_n$$

これがすべての自然数 n で成り立つための条件は

$$6+\alpha=\beta,\ 6-\alpha=-\alpha\beta$$ [B]

よって　$6-\alpha=-\alpha(6+\alpha)$

$$\alpha^2+5\alpha+6=0$$

$$(\alpha+3)(\alpha+2)=0$$

ゆえに　$\alpha=-3,\ -2$

したがって　**$(\alpha,\ \beta)=(-3,\ 3),\ (-2,\ 4)$**

(2)　(1)の結果より

$$a_{n+1}+3b_{n+1}=3(a_n+3b_n),$$

$$a_1+3b_1=4$$

$$a_{n+1}+2b_{n+1}=4(a_n+2b_n),$$

$$a_1+2b_1=3$$

よって，

数列 $\{a_n+3b_n\}$ は初項 4, 公比 3 の等比数列，[C]

数列 $\{a_n+2b_n\}$ は初項 3，公比 4 の等比数列

である。

したがって

> [A]　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の連立漸化式から，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ の一般項を求める方法として
> $a_{n+1}-\alpha b_{n+1}=\beta(a_n-\alpha b_n)$
> を満たす α，β の値を求める。

> [B]　恒等式であるから，係数を比較する。

> [C]　$a_{n+1}=ra_n$
> 公比 r の等比数列

$$a_n+3b_n=4\cdot3^{n-1}\ \cdots\cdots ①$$ [D]

$$a_n+2b_n=3\cdot4^{n-1}\ \cdots\cdots ②$$

① − ②より　$\boldsymbol{b_n=4\cdot3^{n-1}-3\cdot4^{n-1}}$

これを②に代入すると

$$a_n+2\left(4\cdot3^{n-1}-3\cdot4^{n-1}\right)=3\cdot4^{n-1}$$

よって　$\boldsymbol{a_n=-8\cdot3^{n-1}+9\cdot4^{n-1}}$

［D］　数列 $\{a_n-\alpha b_n\}$ の一般項を n の式で表す。

第 4 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：③，ウ：③，エ：①，オ：3，
カ：2，キ：2，ク：2，ケ：1，コ：⑤

[解説]

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(n+1)^2}\right\}=\frac{n+2}{2(n+1)}$$

$\cdots\cdots(*)$

とする。

[1]　$n=\mathbf{1}$ のとき　[A]

$$((*)\text{の左辺})=1-\frac{1}{2^2}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}}$$

$$((*)\text{の右辺})=\frac{1+2}{2(1+1)}=\frac{3}{4}$$

よって，$(*)$は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，$(*)$が成り立つと仮定すると

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}$$

このとき

$$\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\cdots\left\{1-\frac{1}{(k+1)^2}\right\}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\frac{\boldsymbol{k}+\mathbf{2}}{\mathbf{2}(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})}\left\{1-\frac{1}{(k+2)^2}\right\}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+2)^2-1}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+2}{2(k+1)}\cdot\frac{(k+1)(k+3)}{(k+2)^2}$$

$$=\frac{k+\mathbf{3}}{\mathbf{2}(k+\mathbf{2})}=\frac{(k+1)+\mathbf{2}}{\mathbf{2}\{(k+1)+\mathbf{1}\}}$$

[A]　数学的帰納法
自然数 n に関する命題 P がすべての自然数 n で成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り。
[1]　$n=1$ のとき命題 P が成り立つことを示す。
[2]　$n=k$ のとき命題 P が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

よって，$n=\boldsymbol{k+1}$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

2 [正解] サシ：11，スセ：11，ソタ：64，チ：9，ツテ：64，ト：5

[解説]

「$2^{6n-5}+3^{2n}$ は 11 の倍数である」を（＊）とする。

[1]　$n=1$ のとき [A]

$$2^{6\cdot1-5}+3^{2\cdot1}=2+9=\mathbf{11}$$

よって，（＊）は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，（＊）が成り立つと仮定すると

$$2^{6k-5}+3^{2k} \text{ は 11 の倍数}$$

すなわち　$2^{6k-5}+3^{2k}=\mathbf{11}m$（$m$ は整数）

このとき

$$\begin{aligned}&2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}\\&=2^6\cdot2^{6k-5}+3^2\cdot3^{2k}\\&=\mathbf{64}\cdot2^{6k-5}+\mathbf{9}\cdot3^{2k}\\&=64\left(11m-3^{2k}\right)+9\cdot3^{2k}\\&=64\cdot11m-55\cdot3^{2k}\\&=11\left(\mathbf{64}m-\mathbf{5}\cdot3^{2k}\right)\end{aligned}$$

$64m-5\cdot3^{2k}$ は整数であるから，

$2^{6(k+1)-5}+3^{2(k+1)}$ は 11 の倍数である。

よって，$n=k+1$ のときにも（＊）は成り立つ。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，（＊）は成り立つ。

第４講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：1，ウ：1，エ：①，オ：1，

カ：2，キ：0，ク：⑤

[解説]

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$　すなわち

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{n} \geqq \frac{2n}{n+1}\cdots\cdots(*)$$

について

[1]　$n=1$ のとき 【A】

$$((*)\text{の左辺}) = \frac{1}{1} = \mathbf{1}$$

$$((*)\text{の右辺}) = \frac{2\cdot1}{1+1} = \mathbf{1}$$

よって，$(*)$は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，$(*)$が成り立つと仮定すると

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k} \geqq \frac{2k}{k+1}$$

このとき

$$\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$\geqq\left(\frac{\mathbf{2k}}{\mathbf{k+1}}+\frac{1}{k+1}\right)-\frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

$$=\frac{2k+1}{k+1}-\frac{2k+2}{k+2}$$

$$=\frac{(2k+1)(k+2)-(k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{k}{(k+\mathbf{1})(k+\mathbf{2})}>\mathbf{0}$$

ゆえに

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots\cdots+\frac{1}{k}+\frac{1}{k+1} \geqq \frac{2(k+1)}{(k+1)+1}$$

よって，$n=\boldsymbol{k+1}$ のときにも$(*)$は成り立つ。

> [A]　数学的帰納法
> 自然数 n に関する命題 P がすべての自然数 n で成り立つことを，数学的帰納法を用いて証明する方法は以下の通り。
> [1]　$n=1$ のとき命題 P が成り立つことを示す。
> [2]　$n=k$ のとき命題 P が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

[1]，[2] より，すべての自然数 n について，(＊) すなわち

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \geqq \frac{2n}{n+1}$$

は成り立つ。

2 **[正解]** ケ：4，コサ：16，シス：16，セ：4，
ソ：②，タ：3，チ：1

[解説]

$$4^{n-2} \geqq n^2 \cdots\cdots (＊)$$

とする。

[1]　$n=4$ のとき [B]

$$((＊)\text{の左辺}) = 4^{4-2} = \mathbf{16}$$

$$((＊)\text{の右辺}) = 4^2 = \mathbf{16}$$

よって，(＊) は成り立つ。

[2]　$n=k\,(k \geqq 4)$ のとき，(＊) が成り立つと仮定すると

$$4^{k-2} \geqq k^2$$

このとき

$$\begin{aligned}&4^{(k+1)-2}-(k+1)^2\\&=\mathbf{4}\cdot 4^{k-2}-(k+1)^2\\&\geqq 4\cdot \boldsymbol{k}^{\mathbf{2}}-(k+1)^2\\&=3k^2-2k-1\\&=(3k+1)(k-\mathbf{1})>0\end{aligned}$$

ゆえに　$4^{(k+1)-2} \geqq (k+1)^2$

よって，$n=k+1$ のときにも (＊) は成り立つ。

[1]，[2] より，4 以上のすべての自然数 n について，(＊) は成り立つ。

> [B]　数学的帰納法（n が 2 以上の場合）
> [1]　$n=$●のとき命題 P が成り立つことを示す。
> [2]　$n=k$（$k \geqq$●）のとき命題 P が成り立つことを仮定し，$n=k+1$ のときにも命題 P が成り立つことを示す。

第4講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：2，ウ：5，エ：3，オ：7，
カ：4，キ：②，ク：④，ケ：⑤，コ：⑤

[解説]

(1) $a_2=\dfrac{4-1}{3-1}=\dfrac{3}{2}$

$$a_3=\frac{4-\frac{3}{2}}{3-\frac{3}{2}}=\frac{5}{3}$$

$$a_4=\frac{4-\frac{5}{3}}{3-\frac{5}{3}}=\frac{7}{4}$$

(2) (1)より，$a_n=\dfrac{2n-1}{n}$ ……(＊)と推測される。

[A]

[1]　$n=1$ のとき

$a_1=\dfrac{2-1}{1}=1$ より，(＊)は成り立つ。

[2]　$n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_k=\frac{2k-1}{k}$$

このとき

$$a_{k+1}=\frac{4-a_k}{3-a_k}=\frac{4-\frac{2k-1}{k}}{3-\frac{2k-1}{k}}$$ [B]

$$=\frac{2k+1}{k+1}=\frac{2(k+1)-1}{k+1}$$

よって，$n=k+1$ のときにも(＊)は成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[A]　推測した a_n が正しいことを，与えられた漸化式を用いて数学的帰納法にて証明する。

[B]　漸化式を利用する。

2 **[正解]** サ：④，シ：4，ス：2，セ：⑤，ソ：④，
タ：0

[解説]

(1) $a_n > 4$ ……(＊)とする。

[1] $n=1$ のとき [C]

$a_1 = 5 > 4$ より(＊)は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき，(＊)が成り立つと仮定すると

$$a_k > 4$$

この仮定のもとで，$a_{k+1} > 4$ すなわち $a_{k+1} - 4 > 0$ を示せばよい。

このとき

$$a_{k+1} - 4 = \frac{a_k}{2} + \frac{8}{a_k} - 4 \quad \text{[B]}$$

$$= \frac{{a_k}^2 + 16 - 8a_k}{2a_k}$$

$$= \frac{(a_k - 4)^2}{2a_k}$$

仮定より，$a_k > 4$ であるから

$$(a_k - 4)^2 > 0,\ 2a_k > 0$$

したがって，$\dfrac{(a_k-4)^2}{2a_k} > 0$ であるから

$$a_{k+1} - 4 > 0 \quad \text{すなわち} \quad a_{k+1} > 4$$

よって，$n = \boldsymbol{k+1}$ のときにも(＊)が成り立つ。

[1]，[2]より，すべての自然数 n について，(＊)は成り立つ。

[C]　数学的帰納法を用いて証明する。

(2)　$a_n - a_{n+1} = a_n - \left(\dfrac{a_n}{2} + \dfrac{8}{a_n}\right) = \dfrac{a_n}{2} - \dfrac{8}{a_n}$

$$= \boldsymbol{\dfrac{a_n{}^2 - 16}{2a_n}}$$

(1)より，$a_n > 4$ であるから　$a_n{}^2 > 16$ [D]

ゆえに　$\dfrac{a_n{}^2 - 16}{2a_n} > \mathbf{0}$

よって　$a_n - a_{n+1} > 0$　すなわち　$a_n > a_{n+1}$

[D]　$a_n > 4$ を利用して $a_n > a_{n+1}$ を示す。

第 5 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：⑧，ウ：⑦，エ：④，

オカ：−1，キク：27，ケ：2

[解説]

$p=\dfrac{1}{4}$，$n=2$ のとき，確率変数 Y の値は

−2 のカードを 2 回取り出すとき

$(-2)+(-2)=-4$

−2 のカードを 1 回，4 のカードを 1 回取り出すとき

$(-2)+4=2$

4 のカードを 2 回取り出すとき

$4+4=8$

ゆえに

$$P(Y=-4)=(1-p)^2=\left(1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

$$P(Y=2)={}_2\mathrm{C}_1\,p(1-p)=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{6}{16}$$

$$P(Y=8)=p^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{16}$$

Y の確率分布は次の表のようになる。

Y	-4	2	8	計
P	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{6}{16}$	$\dfrac{1}{16}$	1

よって，Y の期待値 $E(Y)$ は [A]

$$E(Y)=(-4)\cdot\frac{9}{16}+2\cdot\frac{6}{16}+8\cdot\frac{1}{16}=\mathbf{-1}$$

Y の分散 $V(Y)$ は

[A]　確率変数 X の期待値，分散

確率変数 X が次の表の確率分布に従うとき

X	x_1	x_2	$\cdots$	x_n	計
P	p_1	p_2	$\cdots$	p_n	1

期待値

$$E(X)=x_1p_1+x_2p_2+\cdots\cdots+x_np_n$$

$$=\sum_{k=1}^{n}x_kp_k$$

分散　$V(X)=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

$$V(Y)=\left\{(-4)^2\cdot\frac{9}{16}+2^2\cdot\frac{6}{16}+8^2\cdot\frac{1}{16}\right\}-(-1)^2$$

$$=\boldsymbol{\frac{27}{2}}$$

2 **[正解]** コ：①，サ：⑧，シ：⑤，ス：⑩

[解説]

確率変数 X は二項分布 $B(n,\ p)$ に従うから

期待値　$E(X)=\boldsymbol{np}$

分散　$V(X)=\boldsymbol{np(1-p)}$ [B]

また，n 回の操作で，4 のカードを X 回，-2 のカードを $(n-X)$ 回取り出すから

$$Y=4\cdot X+(-2)\cdot(n-X)=6X-2n$$

したがって

期待値　$E(Y)=E(6X-2n)$

$=6E(X)-2n$ [C]

$=\boldsymbol{6np-2n}$

分散　$V(Y)=V(6X-2n)$

$=6^2\,V(X)$

$=\boldsymbol{36np(1-p)}$

[B]　二項分布と期待値，分散
確率変数 X が二項分布 $B(n,\ p)$ に従うとき，$q=1-p$ とすると
期待値　$E(X)=np$
分散　$V(X)=npq$

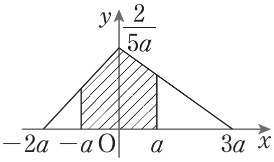
[C]　確率変数 X と定数 $a,\ b$ について，$Y=aX+b$ とすると
期待値　$E(Y)=E(aX+b)$
$=aE(X)+b$
分散　$V(Y)=V(aX+b)=a^2\,V(X)$
標準偏差
$\sigma(Y)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第 5 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：19，ウエ：30

[解説]



$P(-a \leqq X \leqq a)$

$=\int_{-a}^{0}\frac{1}{5a^2}(x+2a)dx$

$+\int_{0}^{a}\frac{2}{15a^2}(3a-x)dx$ [A]

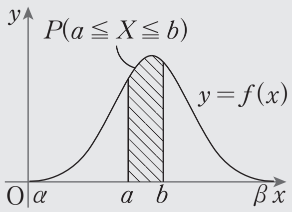
$=\frac{1}{5a^2}\left[\frac{1}{2}x^2+2ax\right]_{-a}^{0}+\frac{2}{15a^2}\left[3ax-\frac{1}{2}x^2\right]_{0}^{a}$

$=-\frac{1}{5a^2}\left(\frac{1}{2}a^2-2a^2\right)+\frac{2}{15a^2}\left(3a^2-\frac{1}{2}a^2\right)$

$=\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{2}+\frac{2}{15}\cdot\frac{5}{2}=\mathbf{\frac{19}{30}}$

[A]　連続型確率変数 X の確率密度関数を $f(x)\,(\alpha \leqq x \leqq \beta)$ とすると

$$P(a \leqq X \leqq b)=\int_a^b f(x)dx$$



2 **[正解]** **オ**：3，**カキ**：38，**ク**：6，**ケコ**：−2，

サ：5，**シス**：38

[解説]

X の期待値は

$$E(X)=\int_{-2a}^{3a} xf(x)dx \quad \text{[B]}$$

$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}x(x+2a)dx+\int_{0}^{3a}\frac{2}{15a^2}x(3a-x)dx$$

$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}(x^2+2ax)dx+\int_{0}^{3a}\frac{2}{15a^2}(3ax-x^2)dx$$

$$=\frac{1}{5a^2}\left[\frac{1}{3}x^3+ax^2\right]_{-2a}^{0}+\frac{2}{15a^2}\left[\frac{3}{2}ax^2-\frac{1}{3}x^3\right]_{0}^{3a}$$

$$=-\frac{1}{5a^2}\left(-\frac{8}{3}a^3+4a^3\right)+\frac{2}{15a^2}\left(\frac{27}{2}a^3-9a^3\right)$$

$$=-\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}a+\frac{2}{15}\cdot\frac{9}{2}a=\boldsymbol{\frac{a}{3}}$$

[B]　連続型確率変数 X の

期待値　$E(X)=m=\int_{\alpha}^{\beta}xf(x)dx$

分散　$V(X)=\int_{\alpha}^{\beta}(x-m)^2f(x)dx$

$=E(X^2)-\{E(X)\}^2$

標準偏差　$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

ここで

$$E(X^2)=\int_{-2a}^{3a}x^2f(x)dx$$

$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}x^2(x+2a)dx+\int_{0}^{3a}\frac{2}{15a^2}x^2(3a-x)dx$$

$$=\int_{-2a}^{0}\frac{1}{5a^2}(x^3+2ax^2)dx$$

$$+\int_0^{3a}\frac{2}{15a^2}(3ax^2-x^3)dx$$

$$=\frac{1}{5a^2}\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}ax^3\right]_{-2a}^{0}$$

$$+\frac{2}{15a^2}\left[ax^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{3a}$$

$$=-\frac{1}{5a^2}\left(4a^4-\frac{16}{3}a^4\right)$$

$$+\frac{2}{15a^2}\left(27a^4-\frac{81}{4}a^4\right)$$

$$=\frac{1}{5}\cdot\frac{4}{3}a^2+\frac{2}{15}\cdot\frac{27}{4}a^2=\frac{7}{6}a^2$$

ゆえに

$$V(X)=E\left(X^2\right)-\{E(X)\}^2$$

$$=\frac{7}{6}a^2-\left(\frac{a}{3}\right)^2=\frac{19}{18}a^2$$ [B]

よって，X の標準偏差は

$$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}=\sqrt{\frac{19}{18}a^2}=\boldsymbol{\frac{\sqrt{38}}{6}a}$$ [B]

また，Y の期待値は

$$E(Y)=E(-6X-5)=-6E(X)-5$$ [C]

$$=-6\cdot\frac{a}{3}-5=\boldsymbol{-2a-5}$$

Y の標準偏差は

$$\sigma(Y)=\sigma(-6X-5)=|-6|\sigma(X)$$

$$=6\cdot\frac{\sqrt{38}}{6}a$$

$$=\boldsymbol{\sqrt{38}\,a}$$

［C］確率変数 X と定数 a, b について，$Y=aX+b$ とすると

期待値　$E(Y)=E(aX+b)$
$=aE(X)+b$

分散　$V(Y)=V(aX+b)=a^2V(X)$

標準偏差
$\sigma(Y)=\sigma(aX+b)=|a|\sigma(X)$

第 5 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：95

[解説]

5 本のくじから同時に 2 本引く方法は　${}_5C_2$ 通り

2 本の当たりを引く方法は　${}_2C_2$ 通り

よって，事象 A の起こる確率 p は

$$p=\frac{{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{10}$$

試行 T を 2500 回繰り返すとき，事象 A の起こる回数を X とすると, X は二項分布 $B\left(2500,\ \frac{1}{10}\right)$ に従う。

よって，確率変数 X の

期待値　$m=2500\cdot\frac{1}{10}=250$

標準偏差　$\sigma=\sqrt{2500\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{10}}=\sqrt{25\cdot 9}=15$

試行回数 2500 回は十分に大きいから，X は近似的に正規分布 $N(250,\ 15^2)$ に従う。 [A]

ここで，$Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-250}{15}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

よって

$$\begin{aligned}P(X\leqq 274)&=P(Z\leqq 1.6)\\&=P(Z\leqq 0)+P(0\leqq Z\leqq 1.6)\\&=0.5+0.4452\\&=0.9452\end{aligned}$$

したがって，求める確率は　**0.95**

[A]　二項分布 $B(n,\ p)$ に従う確率変数 X は，n が十分に大きいとき，正規分布 $N(np,\ np(1-p))$ に従うとみなしてよい。特に，

$$Z=\frac{X-m}{\sigma}=\frac{X-np}{\sqrt{np(1-p)}}$$

とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

第 6 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑤，イウ：32

[解説]

W_1 は，母集団から無作為に 1 個のトマトを選んだとき，そのトマトの重さである。トマト 1 個の重さを表す確率変数 W は，母平均 m，母標準偏差 32 の分布に従うから，確率変数 $U_1 = W_1 - 180$ の平均と標準偏差は

平均　$E(U_1) = E(W_1 - 180) = E(W_1) - 180$

$= \boldsymbol{m - 180}$ [A]

標準偏差　$\sigma(U_1) = \sigma(W_1 - 180) = \sigma(W_1)$

$= \mathbf{32}$

[A]　確率変数 X と定数 a, b について，$Y = aX + b$ とすると
期待値　$E(Y) = E(aX+b)$
$= aE(X) + b$
分散　$V(Y) = V(aX+b) = a^2 V(X)$
標準偏差
$\sigma(Y) = \sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$

2

[正解] エオ：96，カ：9，キクケ：103，コ：1

[解説]

この母集団から無作為に抽出された 400 個のトマトについて調べた値，U_1，U_2，……，U_{400} の標本平均を $\overline{U}$ とする。

標本の大きさは十分大きいから，$\overline{U}$ は近似的に正規分布 $N\left(m-180,\ \dfrac{32^2}{400}\right)$ に従う。 [B]

よって，$m-180$ すなわち t に対する信頼度 95% の信頼区間は

$$\overline{U} - 1.96 \cdot \frac{32}{\sqrt{400}} \leqq t \leqq \overline{U} + 1.96 \cdot \frac{32}{\sqrt{400}}$$ [C]

$\overline{U} = 100$ とすると

$$100 - 1.96 \cdot 1.6 \leqq t \leqq 100 + 1.96 \cdot 1.6$$

$$100 - 3.136 \leqq t \leqq 100 + 3.136$$

$$96.864 \leqq t \leqq 103.136$$

よって　$\mathbf{96.9 \leqq \boldsymbol{t} \leqq 103.1}$　単位は g

[B]　母平均が m，母標準偏差が σ である母集団から無作為に抽出された大きさ n の標本の標本平均 $\overline{X}$ について，n が十分に大きいとき，$\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(m,\ \dfrac{\sigma^2}{n}\right)$ に従う。

[C]　標本平均が $\overline{X}$ のとき，母平均 m に対する信頼度 95% の信頼区間は
$\overline{X} - 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqq m \leqq \overline{X} + 1.96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$

第６講　PART2　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③，イ：⑥，ウ：②，エ：⑦，オ：⑤，

カキ：48

[解説]

(1)　標本の大きさは　$n=1600$

標本比率は　$R=\dfrac{320}{1600}=0.2$

$$1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=1.96\cdot\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{1600}}$$

$$=1.96\cdot\frac{1}{100}=0.0196$$

よって，信頼度 95% の信頼区間は

$$0.2-0.0196\leqq p\leqq 0.2+0.0196$$ [A]

$$0.1804\leqq p\leqq 0.2196$$

小数第４位を四捨五入して

$$\mathbf{0.180\leqq p\leqq 0.220}$$

(2)　(1)より，$n=1600$，$R=0.2$ であるから

$$2.58\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}=2.58\cdot\sqrt{\frac{0.2\times0.8}{1600}}$$ [A]

$$=2.58\cdot\frac{1}{100}=0.0258$$

よって，信頼度 99% の信頼区間は

$$0.2-0.0258\leqq p\leqq 0.2+0.0258$$

$$0.1742\leqq p\leqq 0.2258$$

小数第４位を四捨五入して

$$\mathbf{0.174\leqq p\leqq 0.226}$$

(3)　母比率 p に対する信頼度 95% の信頼区間の幅は

$$\left(R+1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)-\left(R-1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\right)$$

$$=2\cdot1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

[A]　標本の大きさ n が十分に大きいとき，標本比率を R とすると，母比率 p に対する

信頼度 95%の信頼区間は

$$R-1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq p\leqq R+1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

信頼度 99%の信頼区間は

$$R-2.58\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}\leqq p\leqq R+2.58\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{n}}$$

標本の大きさを N とすると，標本比率 R は変わらず，$n=1600$ のときの信頼区間の幅の $\dfrac{1}{3}$ となるから

$$2\cdot 1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{N}}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{1600}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{N}}=\frac{1}{3\sqrt{1600}}$$

$N=9\cdot 1600$

よって，標本の大きさを9倍にすればよい。

(4)　$n=1600$ で標本比率 R のときの信頼度 r％の信頼区間の幅を

$$2\cdot z\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{1600}}$$

とすると，(1)の信頼区間の幅の $\dfrac{1}{3}$ となるから

$$2\cdot z\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{1600}}=\frac{1}{3}\cdot 2\cdot 1.96\cdot\sqrt{\frac{R(1-R)}{1600}}$$

$$z=\frac{1.96}{3}=0.6533\cdots\fallingdotseq 0.65$$

正規分布表より　$P(0\leqq Z\leqq 0.65)=0.2422$

$0.2422\times 2=0.4844$ より，信頼度を48％にすればよい。

第 6 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：④，イ：①，ウ：⑥，エ：③，オ：①，
カ：⑦，キ：②，ク：④，ケ：②

[解説]

A 市で模擬試験を受験した高校生の母平均を m とする。

対立仮説 H_1 は

「母平均 m は全国平均の 62 点より高い」

すなわち「$\boldsymbol{m>62}$」

帰無仮説 H_0 は

「母平均 m は全国平均の 62 点と同じ」

すなわち「$\boldsymbol{m=62}$」[A]

H_0 が正しいとするとき，標本の大きさは十分大きいから，標本平均 $\overline{X}$ は近似的に正規分布 $N\left(62,\ \dfrac{30^2}{144}\right)$，すなわち $\boldsymbol{N(62,\ 2.5^2)}$ に従う。

$Z=\dfrac{\overline{X}-62}{2.5}$ とおくと，Z は近似的に標準正規分布 $N(0,\ 1)$ に従う。

正規分布表より

$P(Z\leqq 1.64)=0.5+0.4495\fallingdotseq 0.95$ [B]

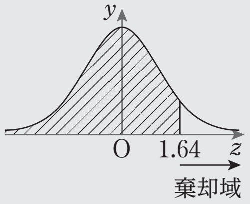
であるから，有意水準 5% の棄却域は　$\boldsymbol{Z\geqq 1.64}$

$\overline{X}=\boldsymbol{66}$ のとき，$Z=\dfrac{66-62}{2.5}=\boldsymbol{1.6}$ であり，この値は棄却域に**入らないから，$\boldsymbol{H_0}$ は棄却できない。**

よって，A 市で模擬試験を受験した高校生の母平均 m は，**全国の平均より高いとは判断できない。**

[A]　仮説検定
仮説検定の主な流れは以下の通り。
① 主張したい仮説 H_1（対立仮説）に反する仮説 H_0（帰無仮説）を立てる。
② 有意水準に従い，H_0 のもとで棄却域を求める。
③ 標本調査の結果から得られた確率変数の値が棄却域に入るか入らないかを判断する。
- 棄却域に入る場合は，H_0 を棄却し，H_1 を採択する。
- 棄却域に入らない場合は，H_0 を棄却できない。

[B]



第 7 講　PART1　確認問題 解答

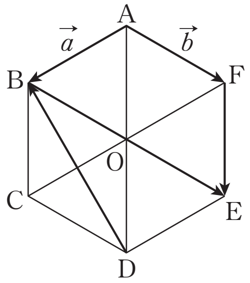
1

[正解] ア：②，イ：③，ウ：⑦，エ：①，オ：⑥

[解説]

(1) $\overrightarrow{BE}=2\overrightarrow{BO}$

$=2\vec{b}$



(2) $\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{FO}+\overrightarrow{OE}$ [A]

$=\vec{a}+\vec{b}$

（別解）

$\overrightarrow{FE}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}$

(3) $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CB}=-\vec{b}-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-2\vec{b}$

（別解）

$\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AO}=\vec{a}-2(\vec{a}+\vec{b})$

$=-\vec{a}-2\vec{b}$

[A]　2 つのベクトルの和や差を用いて

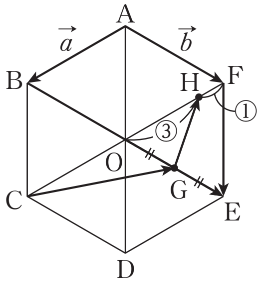
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

のようにベクトルを「分割」し，$\vec{a}$，$\vec{b}$ または，これらに平行なベクトルで表すことができる。

(4) $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{CO}+\overrightarrow{OG}$

$=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$



(5) $\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OH}$

$=-\frac{1}{2}\vec{b}-\frac{3}{4}\vec{a}$

$=-\frac{3}{4}\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b}$

第7講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：⑨

[解説]

$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルのうち

$\vec{a}$ と同じ向きのものは　$\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=3\vec{a}$ [A]

$\vec{a}$ と反対向きのものは　$-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}=-3\vec{a}$

よって，求める単位ベクトルは　$\boldsymbol{3\vec{a}}$，$\boldsymbol{-3\vec{a}}$

> [A]　$\vec{a}\neq\vec{0}$ のとき，$\vec{a}$ と平行な単位ベクトルは
> $\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$ と $-\dfrac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}$

2

[正解] イウ：-6，エ：2，オ：5

[解説]

$2\vec{a}+\vec{b}=(2,\ 2t+8)$

$\vec{a}+2\vec{b}=(-5,\ t+16)$

$2\vec{a}+\vec{b}\neq\vec{0}$，$\vec{a}+2\vec{b}\neq\vec{0}$ であるから，$2\vec{a}+\vec{b}$ と $\vec{a}+2\vec{b}$ が平行となるのは

$2\vec{a}+\vec{b}=k(\vec{a}+2\vec{b})$ [B]

となる実数 k が存在するときである。

$(2,\ 2t+8)=k(-5,\ t+16)$ より

$2=-5k$ ……①

$2t+8=k(t+16)$ ……②

①より　$k=-\dfrac{2}{5}$

このとき，②より　$2t+8=-\dfrac{2}{5}(t+16)$

よって　$\boldsymbol{t=-6}$

$k=-\dfrac{2}{5}$ より　$2\vec{a}+\vec{b}=-\dfrac{2}{5}(\vec{a}+2\vec{b})$

ゆえに　$|2\vec{a}+\vec{b}|=\dfrac{2}{5}|\vec{a}+2\vec{b}|$

> [B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ $(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$ のとき
> $\vec{a}\parallel\vec{b}\iff\vec{b}=k\vec{a}$ となる実数 k が存在する
> $\iff a_1b_2-a_2b_1=0$

よって　$\boldsymbol{|2\vec{a}+\vec{b}|:|\vec{a}+2\vec{b}|=2:5}$

（t を求める別解）

$(2\vec{a}+\vec{b}) /\!/ (\vec{a}+2\vec{b})$ より

$$2\times(t+16)-(2t+8)\times(-5)=0$$ [B]

よって　$\boldsymbol{t=-6}$

3 **[正解]** カ：6，キ：0，ク：6，ケ：0，コサ：−2，
シス：−2，セ：4，ソ：6

[解説]

(1)　四角形ABCDが平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ [C]

すなわち

$(-4,\ -1)=(2-x,\ -1-y)$ [D]

$2-x=-4,\ -1-y=-1$

よって

$\boldsymbol{(x,\ y)=(6,\ 0)}$

(2)　四角形ABDCが平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ [C]

すなわち

$(-4,\ -1)=(x-2,\ y+1)$ [D]

$x-2=-4,\ y+1=-1$

よって

$(x,\ y)=(-2,\ -2)$

四角形ADBCが平行四辺形になるとき

$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}$ [C]

すなわち

$(x-5,\ y-3)=(-1,\ 3)$ [D]

$x-5=-1,\ y-3=3$

よって

$(x,\ y)=(4,\ 6)$

これらと(1)の結果より，4点A，B，C，Dが平行四辺形の頂点となるときのx，yの値は

$\boldsymbol{(x,\ y)=(6,\ 0),\ (-2,\ -2),\ (4,\ 6)}$

[C]　四角形ABCDが平行四辺形
$\Longleftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

[D]　$A(a_1,\ a_2)$，$B(b_1,\ b_2)$のとき
$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$
$=(b_1,\ b_2)-(a_1,\ a_2)$
$=(b_1-a_1,\ b_2-a_2)$

第 7 講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-3，ウエ：-1，オ：5

[解説]

$\vec{p}=\vec{a}+k\vec{b}=(4,\ 3)+k(1,\ 2)$

$=(k+4,\ 2k+3)$

$|\vec{p}|^2=(k+4)^2+(2k+3)^2$ [A]

$=5k^2+20k+25$

> [A]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ のとき
> $|\vec{a}|=\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2}$

(1)　$|\vec{p}|=\sqrt{10}$ のとき　$|\vec{p}|^2=10$

よって

$5k^2+20k+25=10$

$k^2+4k+3=0$

$(k+3)(k+1)=0$

したがって　$\boldsymbol{k=-3,\ -1}$

(2)　$|\vec{p}|^2=5(k+2)^2+5$ であるから，

$k=-2$ のとき，$|\vec{p}|^2$ は最小値 5 をとる。

$|\vec{p}|\geqq 0$ より，このとき $|\vec{p}|$ も最小となる。

したがって，$k=-2$ のとき，$|\vec{p}|$ は最小値 $\boldsymbol{\sqrt{5}}$ をとる。

2

[正解] カ：4，キク：-5

[解説]

$\vec{c}=s\vec{a}+t\vec{b}$ より

$(11,\ 2)=s(4,\ 3)+t(1,\ 2)$

すなわち

$(11,\ 2)=(4s+t,\ 3s+2t)$

よって　$4s+t=11,\ 3s+2t=2$ [B]

ゆえに　$\boldsymbol{s=4,\ t=-5}$

このとき　$\vec{c}=4\vec{a}-5\vec{b}$

> [B]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
> $\vec{a}=\vec{b} \Longleftrightarrow a_1=b_1$ かつ $a_2=b_2$

第 8 講　PART1　確認問題 解答

1

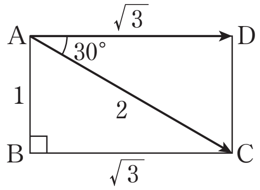
[正解] ア：3

[解説]

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC}$

$=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{AC}|\cos 30^\circ$ [A]

$=\sqrt{3}\times 2\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\mathbf{3}$



[A]　ベクトルの内積
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
ベクトルのなす角を求めるときは，2 つのベクトルの始点を揃えて考えるとよい。

2

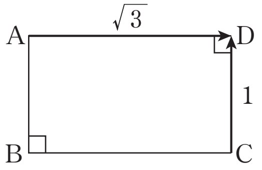
[正解] イ：0

[解説]

$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=|\overrightarrow{AD}||\overrightarrow{CD}|\cos 90^\circ$ [A]

$=\sqrt{3}\times 1\times 0=\mathbf{0}$



3

[正解] ウエ：-1

[解説]

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CD}|\cos 180^\circ$ [A]

$=1\times 1\times(-1)=\mathbf{-1}$

4

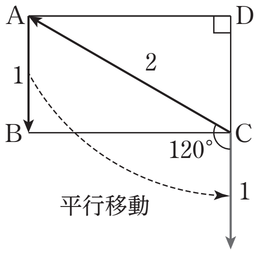
[正解] オカ：-1

[解説]

$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$

$=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{CA}|\cos 120^\circ$ [A]

$=1\times 2\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\mathbf{-1}$



第 8 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] アイ：-2，ウ：3

[解説]

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{k^2+1^2}=\sqrt{k^2+1}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times k+1\times 1=k+1$$ [A]

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$$ [B]

すなわち

$$k+1=\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}\times\frac{1}{2}\ \cdots\cdots①$$

(右辺) >0 であるから　(左辺) >0

よって　$k+1>0$　　$k>-1$

このとき，①の両辺を 2 乗して

$$(k+1)^2=2(k^2+1)\times\frac{1}{4}$$

$$k^2+4k+1=0$$

ゆえに　$k=-2\pm\sqrt{3}$

$k>-1$ より　$\boldsymbol{k=-2+\sqrt{3}}$

[A]　ベクトルの内積（成分）
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

[B]　ベクトルの内積
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2 **[正解]** **エ**：4，**オ**：5，**カキ**：−3，**ク**：5，
ケコ：−4，**サ**：5，**シ**：3，**ス**：5

[解説]

$\vec{n}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{n}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$ [C]

すなわち　$3x+4y=0$ ……① [A]

また，$|\vec{n}|=1$ より　$\sqrt{x^2+y^2}=1$

すなわち　$x^2+y^2=1$ ……②

①より　$y=-\dfrac{3}{4}x$

これを②に代入して

$$x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2=1$$

$$x^2=\frac{16}{25}$$

よって　$x=\pm\dfrac{4}{5}$

$x=\dfrac{4}{5}$ のとき　$y=-\dfrac{3}{5}$

$x=-\dfrac{4}{5}$ のとき　$y=\dfrac{3}{5}$

したがって，求めるベクトルは

$$\vec{n}=\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right),\ \left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第 8 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-3，ウ：2，エ：⑦，オ：7，

カ：1，キ：2，ク：1，ケ：2

[解説]

(1) $|\vec{a}-\vec{b}|=\sqrt{7}$ より

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=7$$

$$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=7 \quad \text{[A]}$$

$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ より

$$1^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+(\sqrt{3})^2=7$$

よって　$\boldsymbol{\vec{a}\cdot\vec{b}=-\frac{3}{2}}$

また　$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{-\frac{3}{2}}{1\times\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0°\leqq\theta\leqq180°$ より　$\boldsymbol{\theta=150°}$

(2) $|4\vec{a}+\vec{b}|^2=16|\vec{a}|^2+8\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$ [A]

$$=16\times1^2+8\times\left(-\frac{3}{2}\right)+(\sqrt{3})^2=7$$

$|4\vec{a}+\vec{b}|\geqq0$ より　$\boldsymbol{|4\vec{a}+\vec{b}|=\sqrt{7}}$

(3) $|\vec{a}+t\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2+2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$ [A]

$$=3t^2-3t+1$$

$$=3\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，$t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$|\vec{a}+t\vec{b}|^2$ は最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

$|\vec{a}+t\vec{b}|\geqq0$ より，このとき $|\vec{a}+t\vec{b}|$ も最小となる。

したがって，$|\vec{a}+t\vec{b}|$ は **$t=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}$** をとる。

[A]　s，t を実数とすると，ベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}|$ について

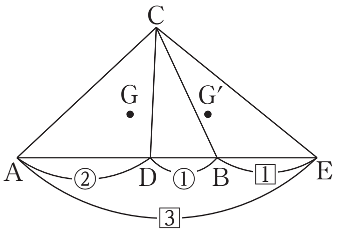
$|s\vec{a}+t\vec{b}|^2=s^2|\vec{a}|^2+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{b}|^2$

第 9 講　PART1　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：③，ウ：②，エ：②，オ：②，カ：⑦，キ：3，ク：⑧

[解説]



(1) $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$ [A]

$\vec{g'}=\dfrac{\vec{c}+\vec{d}+\vec{e}}{3}=\dfrac{1}{3}\left(\vec{c}+\dfrac{\vec{a}+2\vec{b}}{2+1}+\dfrac{-\vec{a}+3\vec{b}}{3-1}\right)$ [B]

$=\dfrac{1}{3}\left(\vec{c}-\dfrac{1}{6}\vec{a}+\dfrac{13}{6}\vec{b}\right)$

$=\boldsymbol{-\dfrac{1}{18}\vec{a}+\dfrac{13}{18}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{GG'}}=\vec{g'}-\vec{g}$

$=\left(-\dfrac{1}{18}\vec{a}+\dfrac{13}{18}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)-\left(\dfrac{1}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}+\dfrac{1}{3}\vec{c}\right)$

$=\boldsymbol{-\dfrac{7}{18}\vec{a}+\dfrac{7}{18}\vec{b}}$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{G'C}}+\overrightarrow{\mathrm{G'D}}+\overrightarrow{\mathrm{G'E}}$

$=(\vec{c}-\vec{g'})+(\vec{d}-\vec{g'})+(\vec{e}-\vec{g'})$

$=(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})-3\vec{g'}$

$=(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})-(\vec{c}+\vec{d}+\vec{e})=\vec{0}$

> [A]　三角形の重心の位置ベクトル
> 3 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$，$\mathrm{C}(\vec{c})$ を頂点とする △ABC の重心 G の位置ベクトル $\vec{g}$ は
> $\vec{g}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{3}$

> [B]　内分点，外分点の位置ベクトル
> 2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を結ぶ線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は
> $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}$
> $m:n$ に外分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は
> $\vec{q}=\dfrac{-n\vec{a}+m\vec{b}}{m-n}=\dfrac{n\vec{a}-m\vec{b}}{-m+n}$

第 9 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：7，イ：5，ウ：4，エ：1，オ：3，
カ：5，キ：7

[解説]

(1)　$3\overrightarrow{\mathrm{PA}}+5\overrightarrow{\mathrm{PB}}+7\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{0}$ より

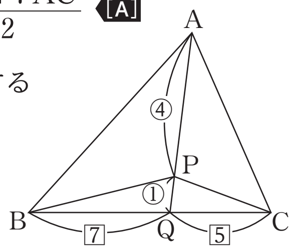
$$-3\overrightarrow{\mathrm{AP}}+5(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})+7(\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}})=\vec{0}$$

$$15\overrightarrow{\mathrm{AP}}=5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+7\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+7\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{15}=\frac{12}{15}\cdot\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+7\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}$$

$$=\frac{4}{5}\cdot\frac{5\overrightarrow{\mathrm{AB}}+7\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{12}$$ [A]



辺 BC を 7：5 に内分する点を Q とすると

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{4}{5}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

したがって，辺 BC を **7：5** に内分する点を Q とすると，点 P は線分 AQ を **4：1** に内分する点である。

> [A]　点 B，C，P の点 A を始点とする位置ベクトルをそれぞれ $\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{p}$ とし，k を実数とすると
>
> $$\vec{p}=k\cdot\left(\frac{n}{m+n}\vec{b}+\frac{m}{m+n}\vec{c}\right)$$
>
> （$\frac{n}{m+n}$ と $\frac{m}{m+n}$ の）和が 1
>
> の形の式を導けばよい。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}=S$ とする。

AP：PQ＝4：1，BQ：QC＝7：5 であるから

$$\triangle\mathrm{PBC}=\frac{1}{5}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{5}S$$

$$\triangle\mathrm{PCA}=\frac{4}{5}\triangle\mathrm{ACQ}=\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{12}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{5}{15}S$$

$$\triangle\mathrm{PAB}=\frac{4}{5}\triangle\mathrm{ABQ}=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{12}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{7}{15}S$$

したがって

$$\triangle\mathrm{PBC}:\triangle\mathrm{PCA}:\triangle\mathrm{PAB}$$

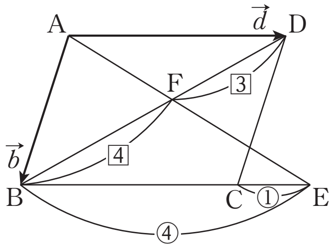
$$=\frac{1}{5}S:\frac{5}{15}S:\frac{7}{15}S=\mathbf{3:5:7}$$

第９講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：3，イ：7，ウ：4，エ：7，オ：3，
カ：4，キ：3，ク：3，ケ：7

[解説]

$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とする。



BF：FD＝4：3 より

$$\overrightarrow{AF}=\frac{3\overrightarrow{AB}+4\overrightarrow{AD}}{4+3}=\frac{1}{7}(3\vec{b}+4\vec{d})$$

$$=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\vec{b}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{7}}\vec{d}$$

BC：BE＝**3**：4 より

$$\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\vec{b}+\frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\vec{d}=\frac{1}{3}(3\vec{b}+4\vec{d})$$

よって，$\overrightarrow{AF}=\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{7}}\overrightarrow{AE}$ より，３点 A，F，E は一直線上にある。 [A]

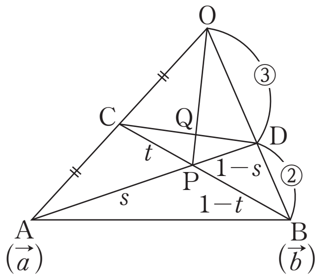
[A]
３点 A，B，P が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

第10講 PART1 確認問題 解答

1

[正解] ア：2，イ：7，ウ：3，エ：7，オ：2，
カ：9，キ：1，ク：3

[解説]



AP：PD $=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$ [A]

$$=(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}\ \cdots\cdots ①$$

CP：PB $=t:(1-t)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$ [A]

$$=\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}\ \cdots\cdots ②$$

①，②より

$$(1-s)\vec{a}+\frac{3}{5}s\vec{b}=\frac{1}{2}(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立であるから

$$1-s=\frac{1}{2}(1-t),\quad \frac{3}{5}s=t$$

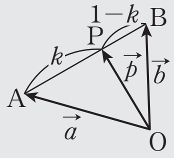
よって　$s=\frac{5}{7}$，$t=\frac{3}{7}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}}$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$（$k$ は実数）とおくと，

$\vec{a}=2\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\vec{b}=\frac{5}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{2}{7}k\vec{a}+\frac{3}{7}k\vec{b}=\frac{4}{7}k\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{5}{7}k\overrightarrow{\mathrm{OD}}\ \cdots\cdots ③$$

> [A]　線分 AB を内分する点 P について，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると
> $\vec{p}=(1-k)\vec{a}+k\vec{b}\ (0<k<1)$
> と表される。
>
> 
>

CQ：QD $=u:(1-u)$ とおくと

$$\overrightarrow{OQ}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}\ \cdots\cdots④$$

③，④より

$$\frac{4}{7}k\overrightarrow{OC}+\frac{5}{7}k\overrightarrow{OD}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$$

$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ は 1 次独立であるから

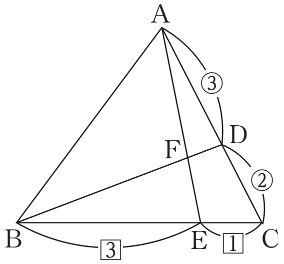
$$\frac{4}{7}k=1-u,\ \frac{5}{7}k=u$$

よって　$k=\frac{7}{9}$，$u=\frac{5}{9}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OQ}=\frac{2}{9}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}}$

2 **[正解]** ケ：1，コ：6，サ：1，シ：2

[解説]



$\overrightarrow{AF}=k\overrightarrow{AE}$（$k$ は実数）とおくと，$\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AD}$ より

$$\overrightarrow{AF}=k\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AC}\right)=\frac{1}{4}k\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}k\overrightarrow{AC}$$

$$=\frac{1}{4}k\overrightarrow{AB}+\frac{5}{4}k\overrightarrow{AD}$$

点 F は直線 BD 上の点であるから

$$\frac{1}{4}k+\frac{5}{4}k=1$$ [B]

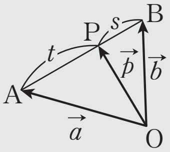
よって　$k=\frac{2}{3}$

したがって　$\boldsymbol{\overrightarrow{AF}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$

[B]　点 P が直線 AB 上にあるとき，3 点 A，B，P の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ とすると

$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$，$s+t=1$

と表される。すなわち，$\vec{p}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表したときの $\vec{a}$，$\vec{b}$ の係数の和が 1 である。



$s+t=1$

第 10 講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：③，イ：1，ウ：4，エ：2

[解説]

正六角形 ABCDEF の中心を O とすると

$$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BO}=\vec{a}+\vec{b}\quad\text{[A]}$$

$$\overrightarrow{GE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OE})-\frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$$

$$=(\vec{a}+\vec{b}+\vec{b})-\frac{3}{4}\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}$$

[A]　2 つのベクトルの和や差を用いて

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}$

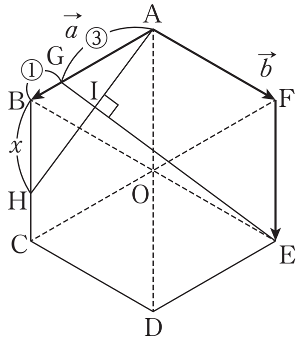
のようにベクトルを「分割」し，$\vec{a}$，$\vec{b}$ または，これらに平行なベクトルで表すことができる。

2

[正解] オ：5，カ：3，キ：2，ク：2，ケ：3，

コサ：15，シス：19，セ：6

[解説]



(1)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ より

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 120^\circ=1\times1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

BH $=x$ とおくと，BC：BH $=1:x$ であるから

$$\overrightarrow{BH}=x\overrightarrow{BC}=x(\vec{a}+\vec{b})=x\vec{a}+x\vec{b}\quad\text{[B]}$$

よって

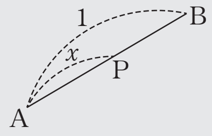
$$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BH}=\vec{a}+x\vec{a}+x\vec{b}$$

$$=(x+1)\vec{a}+x\vec{b}$$

$\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{GE}$ より　$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{GE}=0$

[B]　線分 AB 上の点 P について，AB $=1$，AP $=x$ とすると

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{GE}}=\dfrac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}$ より

$$\left\{(x+1)\vec{a}+x\vec{b}\right\}\cdot\left(\frac{1}{4}\vec{a}+2\vec{b}\right)=0$$

$$\left\{(x+1)\vec{a}+x\vec{b}\right\}\cdot(\vec{a}+8\vec{b})=0$$

$$(x+1)|\vec{a}|^2+(9x+8)\vec{a}\cdot\vec{b}+8x|\vec{b}|^2=0 \quad \text{[C]}$$

$$(x+1)+(9x+8)\times\left(-\frac{1}{2}\right)+8x=0$$

[C]　s，t，u，v を実数とすると
$(s\vec{a}+t\vec{b})\cdot(u\vec{a}+v\vec{b})$
$=su|\vec{a}|^2+(sv+tu)\vec{a}\cdot\vec{b}+tv|\vec{b}|^2$

ゆえに　$x=\dfrac{2}{3}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{5}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{b}}$，**BH** $\boldsymbol{=\dfrac{2}{3}}$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\overrightarrow{\mathrm{AH}}$（$k$ は実数）とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=k\left(\frac{5}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\right)=\frac{5}{3}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}\ \cdots\cdots①$$

また，GI : IE $=s:(1-s)$ とおくと

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AG}}+s\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$

$$=(1-s)\times\frac{3}{4}\vec{a}+s(\vec{a}+2\vec{b})$$

$$=\left(\frac{s}{4}+\frac{3}{4}\right)\vec{a}+2s\vec{b}\ \cdots\cdots②$$

①，②より

$$\frac{5}{3}k\vec{a}+\frac{2}{3}k\vec{b}=\left(\frac{s}{4}+\frac{3}{4}\right)\vec{a}+2s\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は１次独立であるから

$$\frac{5}{3}k=\frac{s}{4}+\frac{3}{4},\quad \frac{2}{3}k=2s$$

ゆえに　$s=\dfrac{3}{19}$，$k=\dfrac{9}{19}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\dfrac{15}{19}\vec{a}+\dfrac{6}{19}\vec{b}}$

第10講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：26，ウ：2，エオ：13，
カキク：-26，ケコ：13

[解説]

A(2，2)，B(7，3)，C(-4，6) より

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(5,\ 1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-6,\ 4)$$

ゆえに

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{5^2+1^2}=\boldsymbol{\sqrt{26}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(-6)^2+4^2}=\boldsymbol{2\sqrt{13}}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=5\times(-6)+1\times4=\boldsymbol{-26}$$

よって

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{(\sqrt{26})^2\times(2\sqrt{13})^2-(-26)^2}\quad\text{[A]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{26\times26\times2-26^2}=\boldsymbol{13}$$

（別解）

$$S=\frac{1}{2}|5\times4-1\times(-6)|=\boldsymbol{13}\quad\text{[B]}$$

[A]　△ABC の面積を S とすると

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

[B]　△ABC において，
$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(a_1,\ a_2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(b_1,\ b_2)$
のとき，△ABC の面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|a_1b_2-a_2b_1|$$

第 11 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：①，イ：5，ウ：2，エ：4，オ：④，
カ：2，キ：5，クケ：19

[解説]

$\vec{n}=(5,\ 2)$ は，直線 l：$5x+2y+4=0$ の法線ベクトルの 1 つである。 [A] [B]

直線 l と g は平行であるから，g は $\vec{n}$ を法線ベクトルにもつ。

ゆえに，直線 g 上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$$ [A]

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y+3)$ より

$$5(x-2)+2(y+3)=0$$

したがって，直線 g の方程式は

$$\boldsymbol{5x+2y-4=0}$$

直線 l と h は垂直であるから，h は $\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ。

ここで，$\vec{m}=(2,\ -5)$ について，

$\vec{m}\cdot\vec{n}=2\times5+(-5)\times2=0$ より，$\vec{m}\perp\vec{n}$ であるから，$\vec{m}$ は，直線 h の法線ベクトルの 1 つである。

ゆえに，直線 h 上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とすると，

$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$$ [A]

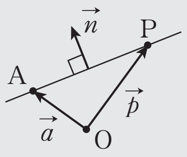
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(x-2,\ y+3)$ より

$$2(x-2)-5(y+3)=0$$

したがって，直線 h の方程式は

$$\boldsymbol{2x-5y-19=0}$$

[A]　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，$\vec{0}$ でないベクトル $\vec{n}$ に垂直な直線のベクトル方程式は
$\vec{n}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0$
$\vec{n}$ を，この直線の法線ベクトルという。



[B]　直線 $ax+by+c=0$ は，
$\vec{n}=(a,\ b)$
を法線ベクトルにもつ。

2　**[正解]** コサ：60

[解説]

$\overrightarrow{n}=(1,\ \sqrt{3})$ は，直線 $x+\sqrt{3}y+4=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

また，$\overrightarrow{m}=(\sqrt{2},\ -\sqrt{6})$ は，

直線 $\sqrt{2}x-\sqrt{6}y-1=0$ の法線ベクトルの 1 つである。

$\overrightarrow{n}$，$\overrightarrow{m}$ のなす角を $\theta\,(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると

$$|\overrightarrow{n}|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$$

$$|\overrightarrow{m}|=\sqrt{(\sqrt{2})^2+(-\sqrt{6})^2}=2\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}=1\times\sqrt{2}+\sqrt{3}\times(-\sqrt{6})=-2\sqrt{2}$$

であるから

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{m}}{|\overrightarrow{n}||\overrightarrow{m}|}=\frac{-2\sqrt{2}}{2\times2\sqrt{2}}=-\frac{1}{2}$$

よって　$\theta=120^\circ$ [C]

したがって，2 直線のなす鋭角 α は

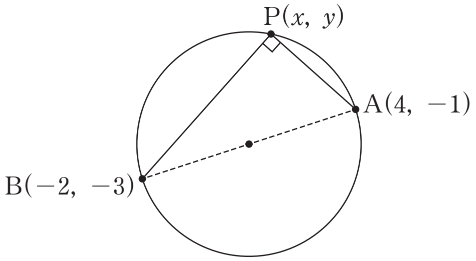
$$\alpha=180^\circ-120^\circ=\mathbf{60}^\circ$$

[C]　2 直線の法線ベクトルのなす角を $\theta\,(0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ)$ とすると，2 直線のなす角 α は
$0^\circ \leqq \theta \leqq 90^\circ$ のとき　$\alpha=\theta$
$90^\circ < \theta \leqq 180^\circ$ のとき　$\alpha=180^\circ-\theta$

第11講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：0，イ：4，ウ：1，エ：2，オ：3，
カ：1，キ：2，クケ：10

[解説]



求める円上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とすると

$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=0$　すなわち　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0$ **[A]**

$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-4,\ y+1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x+2,\ y+3)$ より

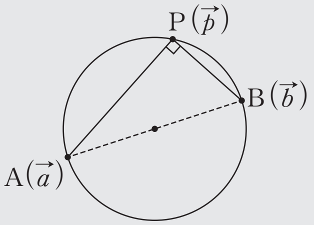
$$(x-4)(x+2)+(y+1)(y+3)=0$$

$$x^2-2x+y^2+4y-5=0$$

よって

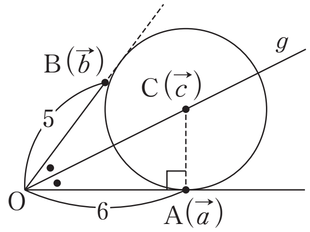
$$(x-1)^2+(y+2)^2=10$$

[A]　2 点 $\mathrm{A}(\vec{a})$，$\mathrm{B}(\vec{b})$ を直径の両端とする円のベクトル方程式は
$(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{p}-\vec{b})=0$



2 ［正解］コ：5，サ：8，シ：3，ス：4

［解説］



点 C は ∠AOB の二等分線 g 上にあるから

$$\vec{c}=k\left(\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)=k\left(\frac{\vec{a}}{6}+\frac{\vec{b}}{5}\right) \quad \text{[B]}$$

$$=\frac{k}{30}(5\vec{a}+6\vec{b}) \ (k \text{ は実数})$$

とおける。ここで，$\dfrac{k}{30}=t$ とおくと

$$\vec{c}=t(5\vec{a}+6\vec{b}) \ (t \text{ は実数})$$

とおける。

CA ⊥ OA より　$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{OA}=0$

すなわち　$(\vec{a}-\vec{c})\cdot\vec{a}=0$

$$\{\vec{a}-t(5\vec{a}+6\vec{b})\}\cdot\vec{a}=0$$

$$|\vec{a}|^2-5t|\vec{a}|^2-6t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$36-5\times36t-6\times18t=0$$

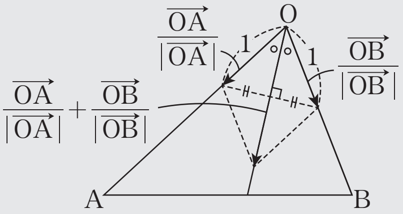
よって　$t=\dfrac{1}{8}$

したがって　$\boldsymbol{\vec{c}=\dfrac{5}{8}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}}$

［B］　△OAB において，∠AOB の二等分線を表すベクトル方程式は

$$\overrightarrow{OP}=k\left(\frac{\overrightarrow{OA}}{|\overrightarrow{OA}|}+\frac{\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OB}|}\right)$$

ただし，k は実数とする。



第11講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：③

[解説]

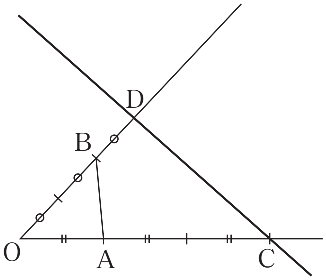
$s+2t=3$ より　$\dfrac{s}{3}+\dfrac{2}{3}t=1$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{s}{3}(3\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\frac{2}{3}t\left(\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$ [A]

よって，$3\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\dfrac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，

点 P の存在範囲は　**直線 CD**



[A]　△OAB において，
$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$
で表される点 P の存在範囲は以下
$s+t=1$ …直線 AB
$s+t=1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
…線分 AB
$0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$
…△OAB の周および内部
$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq t\leqq 1$
…$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とすると，平行四辺形 OACB の周および内部

2 **[正解]** イ：⑥

[解説]

$2s+t=k$ とおくと　$1 \leqq k \leqq 2$

このとき　$\dfrac{2s}{k}+\dfrac{t}{k}=1$，$\dfrac{2s}{k} \geqq 0$，$\dfrac{t}{k} \geqq 0$

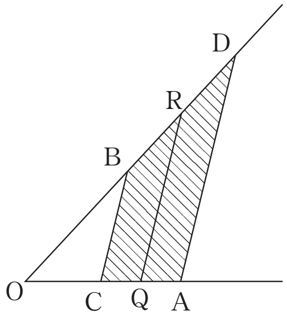
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=\frac{2s}{k}\left(\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)+\frac{t}{k}\left(k\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)$$ [A]

$\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$k\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ とし，k を固定すると，点 P の存在範囲は線分 CB に平行な線分 QR 上である。

ここで，$2\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とし，k を $1 \leqq k \leqq 2$ の範囲で変化させると，線分 QR は下図の線分 CB から AD まで平行に動く。

よって，点 P の存在範囲は

台形 ADBC の周および内部



第 12 講　PART1　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イウ：-1，エ：0

[解説]

$P(x,\ y,\ 0)$ とする。[A]

$AP=BP$ より　$AP^2=BP^2$

よって

$$(x+1)^2+(y-1)^2+(0+1)^2$$
$$=(x-4)^2+(y-0)^2+(0-3)^2 \quad \text{[B]}$$

ゆえに　$5x-y-11=0$ ……①

$BP=CP$ より　$BP^2=CP^2$

よって

$$(x-4)^2+(y-0)^2+(0-3)^2$$
$$=(x-3)^2+(y-2)^2+(0-2)^2 \quad \text{[B]}$$

ゆえに　$x-2y-4=0$ ……②

①，②より　$x=2,\ y=-1$

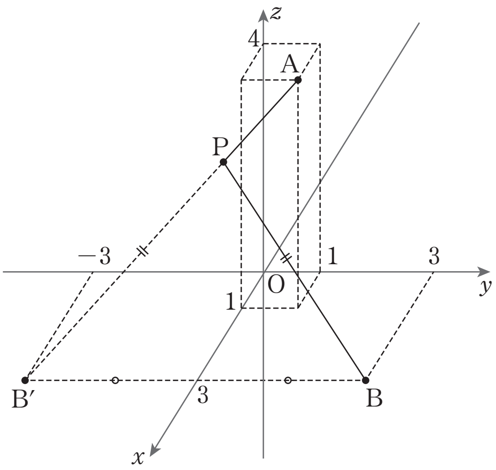
したがって，点 P の座標は　**(2，−1，0)**

[A]　座標空間において
　xy 平面上の点：$(x,\ y,\ 0)$
　yz 平面上の点：$(0,\ y,\ z)$
　zx 平面上の点：$(x,\ 0,\ z)$
と表すことができる。

[B]　2 点 $A(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$B(x_2,\ y_2,\ z_2)$ 間の距離 AB は
$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

2 [正解] オ：6

[解説]



2 点 A，B は，zx 平面に関して同じ側にある。

zx 平面に関して点 B と対称な点を B′とすると

$$B'(3,\ -3,\ 0)$$ [C]

PB＝PB′ であるから

$$AP+PB=AP+PB' \geqq AB'$$

したがって，AP＋PB が最小となるのは，3 点 A，P，B′ が一直線上にあるとき，すなわち点 P が線分 AB′ と zx 平面の交点のときである。

よって，求める最小値は

$$AB'=\sqrt{(3-1)^2+(-3-1)^2+(0-4)^2}$$ [B]

$$=\mathbf{6}$$

[C]　点 P$(a,\ b,\ c)$ と各座標平面に関して対称な点の座標は，次のように表される。

xy 平面：$(a,\ b,\ -c)$
yz 平面：$(-a,\ b,\ c)$
zx 平面：$(a,\ -b,\ c)$

第12講　PART2　確認問題 解答

1

[正解] ア：②，イ：⑥，ウエ：−7，オ：⑤

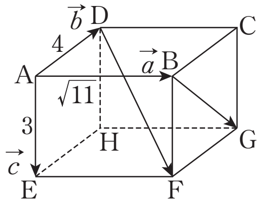
[解説]

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CG}}$ [A]

$=\boldsymbol{\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{DF}}=\overrightarrow{\mathrm{DC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{BF}}$

$=\boldsymbol{\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}}$



(2) $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}=(\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})$$

$$=-|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2=-4^2+3^2$$

$$=\boldsymbol{-7}$$

(3) $$|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|=\sqrt{4^2+3^2}=5$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DF}}|=\sqrt{(\sqrt{11})^2+4^2+3^2}=6$$

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ のなす角 θ について

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BG}}||\overrightarrow{\mathrm{DF}}|}=\frac{-7}{5\times6}=-\frac{7}{30}$$ [B]

ここで，$-\frac{1}{2}<-\frac{7}{30}<0$ であるから

$$\cos 120^\circ<\cos\theta<\cos 90^\circ$$

よって　$\boldsymbol{90^\circ<\theta<120^\circ}$

> [A]　空間ベクトルにおいても，平面の場合と同様，2 つのベクトルの和や差を用いて
> $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}$
> $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$
> のようにベクトルを分割し，指定されたベクトルを用いて表すことができる。

> [B]　$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ（$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$）とすると
> $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$
> $\Longleftrightarrow \cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

第12講　PART3　確認問題 解答

1　**[正解]** アイ：18，ウ：3，エ：2

[解説]

$$\overrightarrow{AB}=(-2,\ 1,\ -2)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-6,\ 2,\ -2)$$

よって

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=(-2)\times(-6)+1\times2+(-2)\times(-2)\quad\text{[A]}$$

$$=18$$

また

$$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{(-2)^2+1^2+(-2)^2}=3$$

$$|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{(-6)^2+2^2+(-2)^2}=2\sqrt{11}$$

$\angle BAC=A$ とすると

$$\cos A=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|}=\frac{18}{3\times2\sqrt{11}}=\frac{3}{\sqrt{11}}\quad\text{[A]}$$

$\sin A>0$ より

$$\sin A=\sqrt{1-\cos^2 A}=\sqrt{1-\left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^2}=\sqrt{\frac{2}{11}}$$

したがって

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin A\quad\text{[B]}$$

$$=\frac{1}{2}\times3\times2\sqrt{11}\times\sqrt{\frac{2}{11}}$$

$$=3\sqrt{2}$$

（S を求める別解）

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}\quad\text{[B]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{9\times44-18^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36(11-9)}$$

$$=3\sqrt{2}$$

[A]　$\vec{0}$ でない2つのベクトル
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$
$$=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$$
$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$
$$=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1{}^2+a_2{}^2+a_3{}^2}\sqrt{b_1{}^2+b_2{}^2+b_3{}^2}}$$

[B]　△ABCの面積 S は

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\sin\angle BAC$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

2

[正解] オ：2，カキ：14，ク：3，ケ：1，コ：2，
サ：3，シ：1

[解説]

$\vec{e}=(x,\ y,\ z)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{e}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{e}=0$

よって　$-2x+y+z=0$ ……① [C]

$\vec{b}\perp\vec{e}$ より　$\vec{b}\cdot\vec{e}=0$

よって　$x-y+z=0$ ……② [C]

$|\vec{e}|=1$ より　$|\vec{e}|^2=1^2$

よって　$x^2+y^2+z^2=1$ ……③

①，②より　$y=\dfrac{3}{2}x,\ z=\dfrac{x}{2}$

これらを③に代入して

$$x^2+\left(\frac{3}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2=1$$

$$x^2=\frac{4}{14}$$

よって　$x=\pm\dfrac{2}{\sqrt{14}}$

したがって，求める単位ベクトル $\vec{e}$ は

$$\boldsymbol{\vec{e}=\left(\frac{2}{\sqrt{14}},\ \frac{3}{\sqrt{14}},\ \frac{1}{\sqrt{14}}\right),}$$

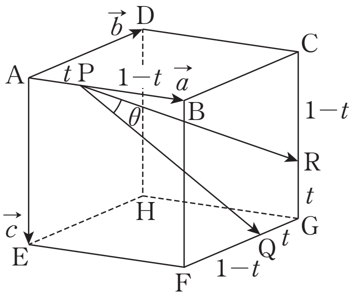
$$\boldsymbol{\left(-\frac{2}{\sqrt{14}},\ -\frac{3}{\sqrt{14}},\ -\frac{1}{\sqrt{14}}\right)}$$

[C]　$\vec{0}$ でない2つのベクトル
$\vec{a}=(a_1,\ a_2,\ a_3)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2,\ b_3)$
について
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0$

第 13 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：⑦，イ：⑥，ウ：4，エ：3，オ：2，
カ：4，キ：3

[解説]



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\{t\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AG}}\}-t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ [A]

$=\{t(\vec{a}+\vec{c})+(1-t)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}-t\vec{a}$

$=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}}$

$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{AR}}-\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$=\{t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AG}}\}-t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ [A]

$=\{t(\vec{a}+\vec{b})+(1-t)(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\}-t\vec{a}$

$=\boldsymbol{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}}$

> [A]　平面と同様，空間においても，2 点 A$(\vec{a})$，B$(\vec{b})$ に対して
> 線分 AB を $m:n$ に内分する点 P の位置ベクトル $\vec{p}$ は
> $\vec{p}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}=\dfrac{n}{m+n}\vec{a}+\dfrac{m}{m+n}\vec{b}$
> 線分 AB を $t:(1-t)$ に内分する点 Q の位置ベクトル $\vec{q}$ は
> $\vec{q}=(1-t)\vec{a}+t\vec{b}$

(2)　$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$ より

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}|^2$ [B]

$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+(1-t)^2|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2$

$+2(1-t)^2\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}$

$+2(1-t)\vec{c}\cdot\vec{a}$

$=(1-t)^2\times1^2+(1-t)^2\times1^2+1^2$

$=2t^2-4t+3$

> [B]　s，t，u を実数とすると，ベクトルの大きさ $|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|$ について
> $|s\vec{a}+t\vec{b}+u\vec{c}|^2$
> $=s^2|\vec{a}|^2+t^2|\vec{b}|^2+u^2|\vec{c}|^2$
> $+2st\vec{a}\cdot\vec{b}+2tu\vec{b}\cdot\vec{c}+2us\vec{c}\cdot\vec{a}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=|(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}|^2$$ [B]

$$=(1-t)^2|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+(1-t)^2|\vec{c}|^2$$
$$+2(1-t)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(1-t)\vec{b}\cdot\vec{c}$$
$$+2(1-t)^2\vec{c}\cdot\vec{a}$$
$$=(1-t)^2\times1^2+1^2+(1-t)^2\times1^2$$
$$=2t^2-4t+3$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\{(1-t)\vec{a}+(1-t)\vec{b}+\vec{c}\}$$
$$\cdot\{(1-t)\vec{a}+\vec{b}+(1-t)\vec{c}\}$$
$$=(1-t)^2\times1^2+(1-t)\times1^2$$
$$+(1-t)\times1^2$$
$$=t^2-4t+3$$

よって

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|}$$
$$=\frac{t^2-4t+3}{\sqrt{2t^2-4t+3}\sqrt{2t^2-4t+3}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{t^2-4t+3}{2t^2-4t+3}}$$

第 13 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：5，イ：3

[解説]

3 点 A，B，C が一直線上にあるとき，$\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$

を満たす実数 k が存在する。 [A]

$$\overrightarrow{AB}=(x-3,\ -2,\ -1)$$

$$\overrightarrow{AC}=(-4,\ y+1,\ 2)$$

であるから，

$$(-4,\ y+1,\ 2)=k(x-3,\ -2,\ -1)$$

より

$$-4=k(x-3),\ y+1=-2k,\ 2=-k$$

よって　$k=-2$

したがって　$\boldsymbol{x=5,\ y=3}$

[A]　2 点 A，B が異なるとき
3 点 A，B，P が一直線上にある
$\Longleftrightarrow$ $\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ を満たす実数 k が存在する

2 **[正解]** ウ：1，エ：3，オ：3，カ：①，キ：3

[解説]

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdots\cdots(*)$$

$k\overrightarrow{PA}+2\overrightarrow{CP}+\overrightarrow{BP}=\overrightarrow{CD}$ より

$$-k\overrightarrow{AP}+2(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AC})+(\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AC}$$

$$(3-k)\overrightarrow{AP}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}\cdots\cdots(**)$$

$k=3$ のとき　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}=\vec{0}$

このとき$(*)$より，$\overrightarrow{AG}=\vec{0}$ であるから不適。

よって　$k\neq 3$

$(**)$より

$$\overrightarrow{AP}=\frac{1}{3-k}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD})\cdots\cdots(***)$$

$(*)$，$(***)$より　$\overrightarrow{AP}=\dfrac{3}{3-k}\overrightarrow{AG}$ [A]

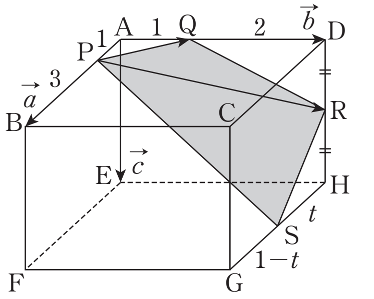
ゆえに，3点A，G，Pは一直線上にある。

したがって，点Pは，2点A，Gを通る直線上にある。

第13講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：1，イ：2

[解説]



$\overrightarrow{AB}=\vec{a}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AE}=\vec{c}$ とする。

（解法1）

$$\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AQ}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{PR}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DR}=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{PS}=\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{HS}$$

$$=-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+t\vec{a}$$

$$=\left(t-\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots①$$

4点P，Q，R，Sが同一平面上にあるとき，実数 α，β を用いて

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\overrightarrow{PQ}+\beta\overrightarrow{PR}$$ [A]

と表される。

$$\overrightarrow{PS}=\alpha\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}\right)+\beta\left(-\frac{1}{4}\vec{a}+\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\alpha+\beta\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\beta\vec{c}\ \cdots\cdots②$$

であるから，①，②より

> [A]　一直線上にない3点A，B，Cが定める平面ABCについて
> 点Pが平面ABC上にある
> $\iff$ $\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ を満たす実数 s，t が存在する
> $\iff$ $\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$，$s+t+u=1$ を満たす実数 s, t, u が存在する

$$\left(t-\frac{1}{4}\right)\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$$

$$=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta)\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\alpha+\beta\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\beta\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから

$$t-\frac{1}{4}=-\frac{1}{4}(\alpha+\beta),\ 1=\frac{1}{3}\alpha+\beta$$

$$1=\frac{1}{2}\beta$$

したがって　$\alpha=-3$，$\beta=2$，$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$

（解法2）

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DR}}=\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{DH}}+\overrightarrow{\mathrm{HS}}$$

$$=\vec{b}+\vec{c}+t\vec{a}=t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\ \cdots\cdots①$$

4点P，Q，R，Sが同一平面上にあるとき，実数

α，β，γ を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{AR}},\ \alpha+\beta+\gamma=1$$ [A]

と表される。

$$\overrightarrow{\mathrm{AS}}=\alpha\times\frac{1}{4}\vec{a}+\beta\times\frac{1}{3}\vec{b}+\gamma\left(\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\right)$$

$$=\frac{1}{4}\alpha\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\beta+\gamma\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\gamma\vec{c}\ \cdots\cdots②$$

であるから，①，②より

$$t\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\frac{1}{4}\alpha\vec{a}+\left(\frac{1}{3}\beta+\gamma\right)\vec{b}+\frac{1}{2}\gamma\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は1次独立であるから

$$t=\frac{1}{4}\alpha,\ 1=\frac{1}{3}\beta+\gamma,\ 1=\frac{1}{2}\gamma$$

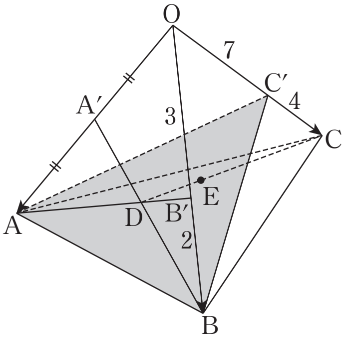
$$\alpha+\beta+\gamma=1$$

したがって　$\alpha=2$，$\beta=-3$，$\gamma=2$，$\boldsymbol{t=\frac{1}{2}}$

第 14 講　PART1　確認問題 解答

1　**[正解]** ア：2，イ：7，ウ：3，エ：4，オカ：21，
キ：2，ク：7，ケ：1，コ：3

[解説]



(1)　点 D は直線 AB′ 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$$

$$=(1-t)\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}\ \ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots①$$

点 D は直線 A′B 上にあるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}\ \ (s\text{ は実数})\ \cdots\cdots②$$

①，②より

$$(1-t)\vec{a}+\frac{3}{5}t\vec{b}=\frac{1}{2}(1-s)\vec{a}+s\vec{b}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立であるから

$$1-t=\frac{1}{2}(1-s)$$

$$\frac{3}{5}t=s$$

ゆえに　$t=\frac{5}{7}$，$s=\frac{3}{7}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2}{7}\vec{a}+\frac{3}{7}\vec{b}}$

(2)　点Eは直線CD上にあるから [A]

$$\overrightarrow{OE}=(1-u)\overrightarrow{OC}+u\overrightarrow{OD}$$
$$=(1-u)\vec{c}+\frac{2}{7}u\vec{a}+\frac{3}{7}u\vec{b}$$
$$=\frac{11}{7}(1-u)\overrightarrow{OC'}+\frac{2}{7}u\overrightarrow{OA}+\frac{3}{7}u\overrightarrow{OB}$$

(u は実数)

点Eは平面ABC′上にあるから [A]

$$\frac{11}{7}(1-u)+\frac{2}{7}u+\frac{3}{7}u=1 \quad \text{[B]}$$

ゆえに　$u=\frac{2}{3}$

よって　$\boldsymbol{\overrightarrow{OE}=\frac{4}{21}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}}$

[A]　4点O, A, B, Cが同一平面上にないとする。このとき，直線OPが平面ABCと交わる点をQとすると
- 点Qは直線OP上にある
- 点Qは平面ABC上にある

これらを用いて，点Qを表す位置ベクトルを求めることができる。

[B]　点Pが平面ABC上にある
$\iff \overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}+u\overrightarrow{OC}$,
$s+t+u=1$ を満たす実数 s, t, u が存在する

第14講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：4，ウ：4，エ：3

[解説]

(1)　$\overrightarrow{AB}=(2,\ -1,\ 0)$

$\overrightarrow{AC}=(0,\ 1,\ -1)$

点Hは平面ABC上の点であるから，s，t を実数として

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$
$$=(0,\ 4,\ 5)+s(2,\ -1,\ 0)+t(0,\ 1,\ -1)$$
$$=(2s,\ -s+t+4,\ 5-t)$$

OH ⊥ 平面ABCより

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$ [A]

> [A]　平面ABC上に点Hがあるとき
> OH ⊥ 平面ABC
> $\Longleftrightarrow \overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$　かつ　$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ より

$$2s\times2+(-s+t+4)\times(-1)+(5-t)\times0=0$$

よって　$5s-t=4$ ……①

$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ より

$$2s\times0+(-s+t+4)\times1+(5-t)\times(-1)=0$$

よって　$-s+2t=1$ ……②

①，②より　$s=1$，$t=1$

よって

$$\overrightarrow{OH}=(2,\ -1+1+4,\ 5-1)=(2,\ 4,\ 4)$$

したがって，点Hの座標は　**(2，4，4)**

(2)　$\overrightarrow{OH}=2(1,\ 2,\ 2)$ より

$$|\overrightarrow{OH}|=2\sqrt{1^2+2^2+2^2}=2\times3=6$$

また

$$|\overrightarrow{AB}|^2=2^2+(-1)^2+0^2=5$$
$$|\overrightarrow{AC}|^2=0^2+1^2+(-1)^2=2$$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=2\times0+(-1)\times1+0\times(-1)$$
$$=-1$$

ゆえに

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$ [B]

$$=\frac{1}{2}\sqrt{5\times2-(-1)^2}=\frac{3}{2}$$

[B]　$\triangle ABC$ の面積を S とすると
$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2|\overrightarrow{AC}|^2-(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})^2}$$

よって，求める体積 V は

$$V=\frac{1}{3}\times\triangle ABC\times OH=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}\times6=3$$

第14講　PART3　確認問題 解答

1

[正解] ア：5，イ：0，ウ：5，エ：6

[解説]

(1)　直線 l のベクトル方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(3,\ 2,\ 3)+t(1,\ -1,\ 1)$$ [A]

$$=(t+3,\ -t+2,\ t+3)\ (t \text{ は実数})$$

直線 l と zx 平面，すなわち $y=0$ の交点は

$-t+2=0$ より $t=2$ のときで，その座標は

$$\mathbf{(5,\ 0,\ 5)}$$

(2)

$$(1,\ 4,\ -5)-(1,\ 0,\ 3)=(0,\ 4,\ -8)$$

$$=4(0,\ 1,\ -2)$$

より，直線 m の方向ベクトルの1つは，

$(0,\ 1,\ -2)$ であるから，直線 m のベクトル方程式は

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 3)+s(0,\ 1,\ -2)$$ [A]

$$=(1,\ s,\ -2s+3)\quad (s \text{ は実数})$$

よって，2点P，Qの座標は

$$P(t+3,\ -t+2,\ t+3)$$

$$Q(1,\ s,\ -2s+3)$$

と表される。このとき

$$PQ^2=(t+2)^2+(s+t-2)^2+(2s+t)^2$$

$$=3t^2+6st+5s^2-4s+8$$

$$=3(t+s)^2+2(s-1)^2+6$$

よって，PQ^2 は，$t+s=0$ かつ $s=1$　すなわち　$t=-1$，$s=1$ のとき最小値6をとる。

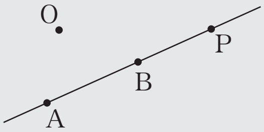
$PQ>0$ より，求める最短距離は　$\mathbf{\sqrt{6}}$

[A]　点Pが直線AB上の点

$\iff \overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AB}$

$\iff \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB}$ を，直線ABの方向ベクトルという。



2

[正解] **オ**：1，**カ**：1，**キ**：2，**ク**：9，**ケ**：3，

コ：−，**サ**：2，**シ**：3，**ス**：②

[解説]

中心 $(-1,\ 1,\ 2)$，半径 3 の球面 S の方程式は

$$\boldsymbol{(x+1)^2+(y-1)^2+(z-2)^2=9} \quad \cdots\cdots(*)$$ [B]

直線 l のベクトル方程式は

$$(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{z})=(3,\ 2,\ 3)+t(1,\ -1,\ 1)$$ [A]

$$=\boldsymbol{(t+3,\ -t+2,\ t+3)} \quad \cdots\cdots(**)$$

（t は実数）

$(**)$を$(*)$に代入して

$$(t+4)^2+(-t+1)^2+(t+1)^2=9$$

$$3t^2+8t+9=0$$

この 2 次方程式の判別式を D とすると

$$\frac{D}{4}=4^2-3\times9=-11<0$$

よって，この 2 次方程式を満たす実数 t は存在しないから，球面 S と直線 l は**共有点をもたない。**

[B]　中心が点 $(a,\ b,\ c)$，半径が r の球面の方程式は

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2$$

Ⓒ RECRUIT
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。